

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

34. Band, Heft 4/6

1. August 1950

S. 145—288

Geschichte.

Bruins, E. M.: Wie haben die Alten gerechnet? (Antwort an Prof. Dr. H. Freudenthal). *Euclides*, Groningen 24, 169—185 (1949) [Holländisch].

In einem Aufsatz gleichen Titels hatte H. Freudenthal (dies. Zbl. 31, 337) sich gegen die von Bruins vorgeschlagenen Erklärungen der antiken Wurzelapproximationen sowie der Archimedischen Gedankengänge bei der Berechnung von π gewendet. Verf. verteidigt hier seine früheren Ausführungen, wobei einige Punkte aufgezeigt werden, in denen der Kritiker ihn nicht richtig verstanden habe. Zu dem von Freudenthal als historisch falsch bezeichneten Wert $\pi < \frac{197888}{62351}$ wird

erwidert, daß die bessere obere Grenze $3\frac{1}{7}$ von Archimedes erst später gefunden worden sein kann. Daß die triviale Abschätzung $\pi > 3\frac{10}{71}$ (entstanden aus $\pi < 3\frac{1}{7} = 3\frac{10}{70}$ durch Probieren und nachträgliches Verifizieren), was als un griechisch abgelehnt wurde, denkbar ist, wird durch Beispiele aus Heron gestützt, in denen solche Variierungen zu einfacheren Zahlen führen. Damit wird auch die Annahme von Kettenbrüchen vermieden. Verf. verwahrt sich gegen den Vorwurf einer fehlerhaften Übersetzung des babyl. Textes (auf terminologische Einzelheiten kam es nicht an) sowie dagegen, daß er wesentliche Literaturangaben weggelassen habe. Er betont ferner, daß er keine Auslegung als gesichert annimmt, solange noch eine andere, ebenfalls mit dem Text in Übereinstimmung stehende Erklärung möglich ist. So sind wohl auch die Rekonstruktionsversuche des Verf. zu verstehen. — Wenn man die hier behandelten und andere Fragen der Geschichte der griechischen Mathematik (Kettenbrüche, Irrationalitätsbeweise, Rolle der Pythagoreer u. a.) sowie die über sie angestellten scharfsinnigen Untersuchungen betrachtet, so gewinnt man die Überzeugung, daß eine endgültige Klärung erst erfolgen kann, wenn weiteres Material (auch „Lehrtexte“) zur Verfügung steht. *Kurt Vogel* (München).

Mogenet, Joseph: Pierre Forcadel, traducteur d'Autolykos. *Arch. internat. Hist. Sci.*, Paris 29, 114—128 (1950).

Verf. stellt fest, daß Forcadel (1520 ?/74, seit 1560 Professor am Collège de France) in seiner französischen Ausgabe der *Sphaera* des Autolykos (Paris 1572) fast wörtlich der lateinischen Bearbeitung des Fr. Maurolico (Messina 1558), in der beigegebenen französischen Ausgabe der *De ortu et occasu siderum* der lateinischen Übersetzung in G. Valla, *De rebus expetiendis et fugiendis* (Venedig 1501) folgt. An Hand des unedierten Nachlasses in Cod. lat. Paris 7472 zeigt er, daß der erwähnte Text des Maurolico weder auf griechischen noch auf arabischen Vorlagen beruht, sondern durch Verkürzen aus einem umfangreicheren Mskr. (1534) entstanden ist, das die sinnerhellende Bearbeitung einer ebenfalls von Valla (1501) stammenden Übersetzung darstellt. Die griechische Vorlage für Valla, dessen mathematische und philologische Fähigkeiten gering waren, ist der Cod. gr. Barberin. 186. *J. E. Hofmann* (Tübingen).

Dijksterhuis, E. J.: Übersetzungen des Prokloskommentars zu Euclids 1. Buch. *Euclides*, Groningen 25, 43—54 (1950) [Holländisch].

Zwei neue Übersetzungen des Prokloskommentars veranlassen den Verf., im ersten (und größeren) Teil des vorliegenden gedankenreichen Aufsatzes, die Rolle zu schildern, die der neuplatonische Philosoph für Methodik, Geschichte und Philosophie der Mathematik gespielt hat. Die in Proklos' beiden Prologen niedergelegten Platonischen Gedanken über das Wesen der mathematischen Dinge und das mathe-

matische Denken sind auch jetzt noch besonders für den Lehrer von Bedeutung, wie auch bei einer Reihe moderner produktiver Mathematiker neuplatonische Auffassungen über ein unabhängig vom eigenen Denken existierendes Reich der Ideen sich feststellen lassen. Verf. bespricht dann (in II) die französische Übersetzung von P. Ver Eecke (Proclus de Lycie; dies. Zbl. 33, 1). Neben zahlreichen Übersetzungsfehlern bedauert Verf. vor allem, daß die philosophischen Betrachtungen des Proklos zu wenig berücksichtigt wurden. Demgegenüber spendet der Verf. der Übersetzung von P. L. Schönberger (Proklus Diadochos ... Gesamtedition von M. Steck, Halle 1945) das höchste Lob (III), während gegen M. Steck, dem Einleitung, Kommentare, Register usw. zu verdanken sind und der mit diesem „Vor- und Beiwerk“ beinahe den Umfang der Übersetzung selbst erreicht, manche Bedenken geäußert werden (IV—V). Trotz der Anerkennung des Verdienstes, die Platonischen Gedankengänge über Proklus hinaus bis zu Nikolaus Cusanus und Kepler verfolgt zu haben, werde der Nachweis darüber vermißt, wie man den erwarteten wunderbaren Einfluß Prokloischer Gedanken auf das moderne Denken sich im einzelnen vorstellen solle. Auch die in den mathematischen Grundlagenuntersuchungen geleistete Arbeit sei unterschätzt worden. Vor allem aber wendet sich der Verf. gegen die Einseitigkeit der aufgezeigten Entwicklungslinie des Europäischen Denkens („Deutsche und westliche Geisteslinie“) und gegen die „Neigung zum deutschen Imperialismus auf geistigem Gebiet“. Wenn Verf. dabei von einem wenig gewünschten „Präludium“ für die Anknüpfung neuer internationaler Beziehungen spricht, so möchte man hinzufügen, daß es sich doch eher um die letzte Strophe einer verklungenen Melodie (das Vorwort ist Dez. 1943 geschrieben) handeln könnte.

Kurt Vogel (München).

Dijksterhuis, E. J.: Simon Stevin. Vortrag, gehalten anläßlich der 400. Wiederkehr von Stevins Geburtstag am 7. Nov. 1948 vor der Gesellschaft für Geschichte der Medizin, Mathematik und Naturwissenschaften. Euclides, Groningen 24, 142—155 (1949) [Holländisch].

Fein abgetönte Festrede des verdienstvollen Mathematikhistorikers, dem wir ein wertvolles Stevin-Buch (den Haag 1943) verdanken. Verf. regt eine Gesamtausgabe der Stevinschen Schriften an und begründet diesen sehr erfreulichen Vorschlag mit der schöpferischen Eigenart des interessanten Ingenieurs, der als Erfinder und als Forscher gleich bedeutend war.

J. E. Hofmann (Tübingen).

Bell, E. T.: Wallis on Fermat. Scripta math., New York 15, 162—163 (1949).

Verf. bemerkt mit Recht, daß die am 21. 11. 1657 von Wallis an Digby gegebenen zahlentheoretischen Aufgaben für Fermat (ganzzahlige Auflösung von $x^2 - y^4 = 9$, $x^4 - y^2 = 12$, $x^3 - y^3 = 19$, $x^3 - y^3 = 20$) wissenschaftlich wertlos sind, weil sie sofort durch triviale Faktorzerlegung behandelt werden können.

J. E. Hofmann (Tübingen).

Taton, René: La préhistoire de l'analyse géométrique. Arch. internat. Hist. Sci., Paris 29, 89—102 (1950).

Verf. gibt eine Übersicht über die Hauptlinien der geometrischen Analyse seit Fermat, Descartes und Desargues bis Monge: erste Anwendungen der Analysis auf ebene und räumliche Kurven, isoliert auftretende differentialgeometrische Fragen, Zusammenhang mit den Differentialgleichungen, Kurven- und Flächentheorie. Er schließt mit auszugsweiser Wiedergabe der ungedruckten Nachschrift von Lemierre (Bibl. Écol. Nat. des Ponts et Chaussées Nr. 1932) nach einer Vorlesung Monges von 1805. Sie zeigt, daß Monge zu diesem Zeitpunkt mittels der Tangentialebene $z = px + qy - (px_0 + qy_0 - z_0)$ an die Fläche $z = z(x, y)$ in analytischer Form zum Wechsel des Raumelements vermöge

$$x' = p, y' = q, z' = px + qy - z$$

übergegangen war und die so definierte Berührungstransformation zur Kennzeichnung spezieller Flächenfamilien und zur Integration linearer partieller Differentialgleichungen verwendet hatte. Mit Recht hebt Verf. die grundsätzliche Bedeutung dieser für die Verknüpfung der partiellen Differentialgleichungen mit differentialgeometrischen Gesichtspunkten richtungsweisenden Auffassung hervor. *Hofmann*.

Dingle, Herbert: René Descartes (1596—1650). *Nature*, London **165**, 213—214 (1950).

Bradley, A. Day: Pieter Venema; teacher, textbook author, and freethinker. *Scripta math.*, New York **15**, 13—16 (1949).

Venema († 1748), der sich als Schüler von Joh. Bernoulli bezeichnet, war 1696/1724 Mitglied der reformierten Gemeinde in Groningen und ließ dort 1714 eine oft wiederabgedruckte niederländische Algebra erscheinen. Er ging als Lehrer an eine Privatschule nach den amerikanischen Kolonien. Seine *Arithmetica of Cyffer-Konst* (New York 1730) enthält ein algebraisches Kapitel, das aus dem Werk von 1714 durch Verkürzen entstanden ist. 1736 erscheint er als Mitglied der ersten Herrnhuter Gemeinde in New York. *J. E. Hofmann* (Tübingen).

Speiser, Andreas: Einteilung der sämtlichen Werke Leonhard Eulers. *Comment. math. Helvetici* **20**, 288—318 (1947).

Aus dieser tabellarischen Übersicht über die erweiterte Neuplanung (die sich vor allem auf die Umgruppierung der noch nicht neu gedruckten astronomischen Abhandlungen bezieht) geht hervor, daß in der I. Reihe (reine Mathematik) 23 Bände fertiggestellt sind und nur mehr 6 fehlen (2 über Variationsrechnung, 1 über Geometrie, 3 über Differentialgeometrie). In der auf 31 Bände veranschlagten II. Reihe (Mechanik und Astronomie) sind bisher 3 Bände gedruckt, in der auf 12 Bände veranschlagten III. Reihe (Physik, Verschiedenes) bisher 4 Bände. Das alles bezieht sich — abgesehen von geringfügigen Ausnahmen — auf die bereits früher gedruckten Abhandlungen und Bücher. Über die für Reihe IV vorgesehenen Briefe und mathematischen Tagebücher, von denen wir noch manchen interessanten Aufschluß erwarten, ist bisher noch kein Detailplan vorhanden. *J. E. Hofmann* (Tübingen).

Bouligand, G.: L'analyse géométrique et sa place dans l'oeuvre de Gaston Darboux. *Arch. internat. Hist. Sci.*, Paris **29**, 103—113 (1950).

Eindringliche Schilderung der umfassenden Tendenzen, von denen Darboux' Lebenswerk bestimmt wird, und die in der völligen Verschmelzung und calculmäßigen Durchdringung der infinitesimalgeometrischen, analytischen und algebraischen Gesichtspunkte gipfeln. *J. E. Hofmann* (Tübingen).

Sergescu, P.: Le bicentenaire de la naissance de Laplace. *Rev. génér. Sci. pur. appl.*; *Bull. Soc. philomathique*, Paris **56**, 241—244 (1949).

Millikan, Robert A.: Albert Einstein on his seventieth birthday. *Rev. modern Physics*, New York **21**, 343—345 (1949).

Broglie, L. de: L'oeuvre d'Einstein et la dualité des ondes et des corpuscules. *Rev. modern Physics*, New York **21**, 345—347 (1949).

Laue, M. von: Zu Albert Einsteins 70-tem Geburtstag. *Rev. modern Physics*, New York **21**, 348—349 (1949).

Frank, Philipp: Einstein's philosophy of science. *Rev. modern Physics*, New York **21**, 349—355 (1949).

Grundlagefragen. Philosophie. Logik.

• **Mostowski, A.:** Mathematische Logik. Universitäts-Lehrgang. (Mathematische Monographien, Bd. XVIII). Warschau-Breslau 1948, VIII und 388 S. [Polnisch.]

In Polen ist die mathematische Logik seit rund 30 Jahren ein Prüfungsfach für alle Mathematiker, welche die unserer Staatsprüfung entsprechende Magisterprüfung bestehen wollen. Diese Ordnung hat einen Aufschwung der Studien zu dieser Logik nach sich gezogen, dem wir

die Schöpfungen der Warschauer Schule aus dem Zeitraum von 1920—1939 verdanken; und sie hat zur Folge gehabt, daß fast unmittelbar nach dem Kriege aus der Feder des einzigen noch heute in Warschau wirkenden Repräsentanten dieser Schule eine für diesen Prüfungszweck verfaßte, in friedensmäßiger Ausstattung gedruckte Monographie hat hervorgehen können, die als ein Muster eines möglichen Lehrganges dieser Logik anzusehen ist. — Ein Werk, das den gegenwärtigen Erkenntnisstand umfaßt, kann auch in einer solchen Monographie nicht geliefert werden. Die Auswahl ist so getroffen worden, daß die Lehrstücke bevorzugt worden sind, die dem Interessengebiet des Mathematikers möglichst nahe stehen. Aus diesem Grunde ist der von der Warschauer Schule durch eine Mannigfaltigkeit von grundlegenden Ergebnissen bereicherte und auf eine Art von Normalform gebrachte Aussagenkalkül nur in den Grundzügen angedeutet. Die Formalisierungstechnik ist auf das unbedingt Erforderliche beschränkt worden. Es ist jedoch im weitesten Umfange Sorge dafür getragen worden, daß man sieht, wie eine strenge Formalisierung erzielt werden kann. Die Kontroversen um die Frage, was als Mathematik gelten soll, sind nur am Rande berührt worden. Der Schwerpunkt liegt in den metamathematischen Betrachtungen. Das Profil dieser Betrachtungen ist wesentlich mitbestimmt durch die Anwendung der topologischen und der semantischen Methode. Hierdurch kommen die Leistungen von A. Tarski, dem Lehrmeister des Verf., neben denen von K. Kuratowski auf eine sehr eindrucksvolle Art zur Geltung. Der Text ist durch ausgezeichnete Beispiele belebt. Er wird fortlaufend durch wohlgedachte interessante Übungsaufgaben ergänzt. Ein zuverlässiges Namen- und Sachregister ist angeschlossen. — Der Lehrgang ist in drei Hauptteile mit 14 Abschnitten zerlegt. Der erste Hauptteil dient der Einführung in die mathematische Logik. Er umfaßt die ersten drei Abschnitte: I. Einleitende Betrachtungen, II. Die Grundzüge des Aussagenkalküls nach der Matrizenmethode, III. Die Quantifikatorentheorie für den engeren Prädikatenkalkül der ersten Stufe, mit zahlreichen instruktiven Beispielen und mit Hindeutungen auf die abweichenden Positionen des Intuitionismus. — Der zweite Hauptteil dient der Einführung der mathematischen Grundbegriffe. Er umfaßt die fünf folgenden Abschnitte: IV. Die Algebra der Mengen und Relationen, auf der Basis des Prädikatenkalküls, mit einer Orientierung über den Zusammenhang des Aussagenkalküls mit diesen beiden Algebren und einer Einführung in die Boolesche Algebra. V. Übergang zu höheren Stufen. Grundzüge der Identitätstheorie, mit einer Diskussion des Extensionalitätsprinzips, die den nicht-trivialen Charakter dieses Prinzips auf eine eindringliche Art zur Geltung bringt. VI. Grundzüge der (von der Relationen-Algebra verschiedenen) Relationentheorie, mit einer originellen Rekonstruktion der Aristotelischen Syllogistik, einer Theorie der Gleichheitskreise (Abstraktionsklassen) und einem Paragraphen über die mehr als zweistelligen Relationen. VII. Die Fregesche Konstruktion des Anzahlbegriffs und des Begriffs der natürlichen Zahl. Einführung eines Unendlichkeitsaxioms in der Gestalt, daß die Anzahl der Allmenge nicht eine natürliche Zahl ist. Es folgt, als Muster einer in eine explizite Definition verwandelten induktiven Definition, die Konstruktion eines expliziten Korrelates einer induktiven Definition der Addition. Der zunächst nicht ersichtliche Zweck dieser Konstruktion wird erst klar an einer wesentlich späteren Stelle (Abschnitt X). Es kommen in diesem Abschnitt dann noch die Isomorphismen und die Homomorphismen zur Sprache. VIII. Begründung und Darstellung der einfachen Typentheorie, in Verbindung mit den wesentlichen Argumenten, die für und gegen diese Theorie zur Diskussion gestellt werden können. Man bemerkt, wie die Russellsche Antinomie unmittelbar und erst ganz überzeugend auf der Basis des Komprehensionsprinzips herauskommt. — Der dritte Hauptteil ist für metamathematische Betrachtungen reserviert. Er umfaßt mit den sechs Abschnitten, in die er zerlegt ist, rund zwei Fünftel des ganzen Lehrganges. Als erstes IX. eine Folge von formalisierten mathematischen Theorien. Diese Folge ist im einzelnen auch für den Nicht-Anfänger von einem ungewöhnlichen Interesse. Es werden elementare (d. i. schon im erweiterten Prädikatenkalkül der ersten Stufe formalisierbare) und nicht-elementare Theorien unterschieden. Beispiele von elementaren Theorien: (1) die Theorie der beiderseits offenen dicht geordneten Mengen, (2) die elementare Gruppentheorie, (3) die elementare Theorie der geordneten Abelschen Gruppen, (4) die elementare Theorie der reellen Zahlen, d. i. die Theorie der reellen Zahlen bis auf das Dedekindsche Stetigkeitsaxiom, aus dem sich bekanntlich in Verbindung mit den übrigen Axiomen das Archimedische Axiom ableiten läßt. (Die Addition ist neben der Multiplikation so schwach charakterisiert, daß eine Andeutung erwünscht gewesen sein würde, aus der sich ergibt, wie man die fehlenden Grundforderungen aus den angegebenen Axiomen erhalten kann.) Es sei schon an dieser Stelle bemerkt, daß für (1), (3), (4) die Entscheidbarkeit bewiesen ist [für (1) von C. H. Langford, für (4) von A. Tarski, für (3) von W. Szmielew], für (2) die Unentscheidbarkeit [von A. Tarski, vgl. J. Symbolic Logic 14, 76 (1949)], für (1) außerdem die deduktive Vollständigkeit in dem Sinne, daß jeder in (1) formalisierbare abgeschlossene Ausdruck in (1) beweisbar oder widerlegbar ist (vgl. den Beweis S. 293—299). Die übrigen und ebenso die noch folgenden Theorien sind dagegen in dem angegebenen Sinne unvollständig (S. 299). Dies ergibt sich für (4) daraus, daß schon die Theorie der quadratischen Gleichungen [die in (4) darstellbar sind, also zu (4) gehören] in (4) nicht mehr begründet werden kann. Ein Beweis für die Unvollständigkeit von (4) ist jedoch nicht angedeutet. — Als Beispiele von nicht-elementaren Theorien sind angegeben (5)

die volle Theorie der reellen Zahlen [mit zwei wichtigen Nachträgen: der Begründbarkeit der Theorie der natürlichen Zahlen in (5) (S. 253 und 287) und der Eliminierbarkeit der Produkt-Konstanten (S. 286ff.)], (6) die Theorie der natürlichen Zahlen, (7) eine an E. Zermelo angelehnte Formalisierung der axiomatischen Mengenlehre, (8) die Kuratowskische Theorie der topologischen Räume. — Es folgt in Abschnitt X eine höchst sorgfältig durchgearbeitete Theorie der Definitionen auf der Basis von Unizitätsbeweisen, die beste Darstellung dieser Theorie, die ich kenne. Es werden grundsätzlich nur explizite Definitionen anerkannt. Dann XI. unter dem Titel „Methodologische Fragen“ als erstes das Deduktionstheorem, sodann eine Reihe von wissenschaftstheoretischen Grundbegriffen mit den wichtigsten Theoremen und wohlgedachten Exemplifizierungen: (1) der (intuitive) Modellbegriff (der semantische folgt erst wesentlich später), (2) der Begriff der Widerspruchsfreiheit einer Theorie, durchdiskutiert an dem Normalfall, in welchem der WF-Beweis durch ein mathematisches Modell geführt werden kann, mit einer zusätzlichen Hindeutung auf die rein strukturellen WF-Beweise im Hilbertschen Sinne, (3) der Unabhängigkeitsbegriff für Axiomensysteme, mit einer Begründung der modelltheoretischen Unabhängigkeitsbeweise, (4) der (in der Mathematik im allgemeinen Falle nicht mitdiskutierte, aber für die Grundlagenforschung in jedem Falle erforderliche) Unabhängigkeitsbegriff für die Grundbegriffe einer Theorie, mit dem Resultat, daß ein Grundbegriff α_1 einer Theorie Θ von den übrigen Grundbegriffen $\alpha_2, \dots, \alpha_k$ von Θ unabhängig ist, wenn es für $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ zwei Interpretationen gibt, die sich nur durch die Interpretation von α_1 unterscheiden, (5) der Begriff der deduktiven Vollständigkeit von Θ [Θ deduktiv vollständig, wenn jeder abgeschlossene Ausdruck in Θ entscheidbar (beweisbar oder widerlegbar) ist], (6) der Begriff der Kategorizität (Θ kategorisch, wenn irgend zwei Modelle des Axiomensystems von Θ isomorph sind), (7) der Begriff der Entscheidbarkeit von Θ , mit der für Unentscheidbarkeitsbeweise unentbehrlichen Verschärfung durch den Begriff der berechenbaren zahlentheoretischen Funktion. Die wechselseitige Unabhängigkeit von (5) und (6) ergibt sich daraus, daß die Theorie der beiderseits offenen dicht geordneten Mengen zwar deduktiv vollständig, aber nicht kategorisch, die Theorie der natürlichen Zahlen zwar kategorisch, aber (wie später gezeigt wird) nicht deduktiv vollständig ist. Daß (7) nicht (5) zur Folge hat, ergibt sich z. B. daraus, daß die elementare Theorie der reellen Zahlen zwar entscheidbar, aber nicht deduktiv vollständig ist (siehe zu Abschnitt IX). — Zur deduktiven Vollständigkeit hätte noch gesagt werden können, warum ein auf allgemeingültige Ausdrücke beschränkter Kalkül, der eine Theorie der Identität enthält, also ein scharf abgegrenzter Logikkalkül mit Identität, nicht deduktiv abgeschlossen sein kann. Unter den hier diskutierten Grundbegriffen hätte noch der Begriff der Gabelbarkeit angeführt werden können. — Im folgenden Abschnitt (XII) wird der Unterschied zwischen Objektsprache und Metasprache an den semantischen Antinomien zur Geltung gebracht. Mit einer ungewöhnlichen Pünktlichkeit wird gezeigt, wie diese Antinomien, im Gegensatz zu den logischen Antinomien, ohne irgendwelche Eingriffe in die Objektsprache durch eine genaue Unterscheidung von Objektsprache und Metasprache zum Verschwinden gebracht werden können. Die Unverbindlichkeit des Epimenides gegenüber der schon den Alten genau bekannten echten Antinomie des Lüngrs wird zutreffend hervorgehoben. Es folgen die Grundzüge der Gödelschen Arithmetisierung der Metasprache. Im nächsten Abschnitt (XIII) wird, auf der Basis der Tarskischen Semantik, die zu diesem Zweck ausführlich und mit bemerkenswerten Vereinfachungen entwickelt wird, das Gödelsche Theorem von der semantischen Vollständigkeit des engeren Prädikatenkalküls bewiesen, also das Theorem, das besagt, daß die Menge der allgemeingültigen Ausdrücke mit der Menge der beweisbaren Ausdrücke zusammenfällt. Die nichttriviale Komponente dieses Theorems, die besagt, daß jeder allgemeingültige Ausdruck beweisbar ist, wird in einer nicht-wesentlich beschränkten Gestalt auf eine originelle Art bewiesen mit Hilfe eines Durchganges durch die Topologie. Die Menge der Attribute (mit einer festen Stellenzahl) wird durch eine eindeutige Abbildung auf das Cantorsche Diskontinuum C eindeutig in die Menge der reellen Zahlen abgebildet. Der entscheidende Hilfssatz, der besagt, daß eine Menge von Ausdrücken ohne gebundene Variablen erfüllbar ist, wenn dies für jede endliche Teilmenge gilt, fällt dann im wesentlichen zusammen mit dem Heine-Borelschen Überdeckungssatz für die kompakte Menge C . Als wichtigste Folgerungen sind angeschlossen (1) das Theorem von Herbrand, das für jeden beweisbaren Ausdruck des engeren Prädikatenkalküls eine Art von Beweisverfahren liefert, und zwar auf der Basis des Aussagenkalküls, (2) das Theorem von Löwenheim und Skolem, mit einer über das Übliche hinausreichenden Diskussion seines Gehaltes und seines anscheinend paradoxen Charakters. — Es folgt im letzten Abschnitt (XIV) als eine nicht-triviale Spezialisierung eines Theorems der Gödelschen Unvollständigkeitstheorie das Theorem, das besagt, daß jeder Logikkalkül wenigstens vierter Stufe im semantischen Sinne unvollständig ist. L sei ein solcher Logikkalkül. Der Beweis wird nicht, wie bei Gödel, syntaktisch geführt, sondern, nach dem Vorbild von A. Tarski, mit dem Durchgang durch die Semantik. Dies hat eine wesentliche Vereinfachung des Beweisganges zur Folge. Es wird zunächst im Anschluß an A. Tarski gezeigt, daß es zu jeder Menge von \aleph_0 -identischen L -Ausdrücken, die im semantischen Sinne in L definierbar ist, einen \aleph_0 -identischen L -Ausdruck gibt, der dieser Menge nicht angehört. Eine Menge M von L -Ausdrücken heißt semantisch definierbar in L , wenn es einen L -Ausdruck Θ gibt mit genau

einer freien Variablen x , so daß für jeden L -Ausdruck H gilt: H liegt in M genau dann, wenn die Gödelnummer von H Θ erfüllt. Aus der Konfrontierung dieses undefinierbarkeitstheorems mit der (angedeuteten) Definierbarkeit der Menge der in L beweisbaren L -Ausdrücke in L ergibt sich zunächst die Existenz eines \aleph_0 -identischen L -Ausdrucks, der nicht in L beweisbar ist. Nun ist L aber so gewählt, daß hieraus ein nicht nur \aleph_0 -identischer, sondern allgemeingültiger L -Ausdruck gewonnen werden kann, der nicht in L beweisbar ist. Hiermit ist das angegebene Unvollständigkeitstheorem bewiesen. Es wird angedeutet, daß und warum diese Unvollständigkeit durch eine beliebige Verstärkung von L im Rahmen der uns bis heute zur Verfügung stehenden formalisierungstechnischen Möglichkeiten nicht überwunden werden kann. Es hätte noch gesagt werden können, daß dieses Unvollständigkeitstheorem auch für jeden Logikkalkül von wenigstens der zweiten Stufe bewiesen werden kann. — Es gibt jetzt neben dem Standwerk von Hilbert-Bernays drei auszuzeichnende Einführungen in die mathematische Logik: die vor kurzem in einer dritten, sorgfältig durchgesehenen und mannigfaltig bereicherten Ausgabe erschienene Einführung von Hilbert-Ackermann, die einer Originalschöpfung gleichzustellende Einführung von A. Tarski [„Introduction to logic and to the methodology of deductive sciences“, Oxford, Univ. Press, New York 1941, 2d ed. revised 1947; dies. Zbl. 25, 4] und den Lehrgang von A. Mostowski. Jede dieser drei Einführungen hat ihr eigentümliches Profil. Sie ergänzen sich gegenseitig auf eine ungewöhnliche Art. Um so erwünschter wird es sein, daß ich mitteilen kann, daß eine überarbeitete englische Ausgabe des jetzt vermutlich nur wenigen zugänglichen polnischen Werkes vom Verf. vorbereitet wird. Sie ist in absehbarer Zeit zu erwarten. Sie sollte dem Leser durch planmäßige Vorverweisungen von dem Mindestumfang der gegenwärtigen Rückverweisungen zu Hilfe kommen. Jetzt übersieht man erst hinterher, wie sorgfältig die Anlage des Ganzen durchdacht ist, warum z. B. die induktiven Definitionen nur auf Grund ihrer Überführbarkeit in explizite Definitionen zugelassen sind, warum Ergänzungen, die man zunächst vermißt, erst an einer wesentlich späteren Stelle folgen u. s. f. Es würde ferner zu wünschen sein, daß etwas gesagt wird zur Erhellung der Frage, wie die syntaktische und die semantische Definierbarkeit sich zueinander verhalten, ebenso der intuitive und der semantische Modellbegriff, für die nur die Notwendigkeit ihrer Unterscheidung betont wird. Der jetzt nur in Theorem 2, S. 360 angedeutete semantische Folgebegriff sollte so eingeschaltet werden, daß gezeigt werden kann, wie er durch das Deduktionstheorem erfaßt wird; denn es scheint mir, daß der Gehalt dieses jetzt etwas beziehungslos eingeschalteten Theorems erst hierdurch klar zur Geltung kommt. Es wird auch zu erwägen sein, wie weit der höchst interessante neue Henkinsche Beweis des Gödelschen Vollständigkeitstheorems [J. Symbolic Logic 14, 159—166 (1949); dies. Zbl. 34, 6], durch den eine wesentliche Vereinfachung erzielt worden ist, heranzuziehen sein würde. Endlich: Es scheint mir, daß es nicht zulässig ist, die Theorie der natürlichen Zahlen als ein Fragment der Logik zu bezeichnen (S. 185), solange für eine Begründung dieser Theorie die Adjungierung eines Unendlichkeitsaxioms erforderlich ist; denn dieses Axiom ist nicht mehr allgemeingültig, folglich nicht von der Qualität eines Satzes der Logik. Es wird also anerkannt werden müssen, daß es bis jetzt nicht gelungen ist, die Arithmetik der natürlichen Zahlen als Ganzes auf ein System von analytischen Aussagen zu reduzieren. Das Unendlichkeitsaxiom ist in jeder Gestalt eine synthetische Aussage. Als eine Aussage über die natürlichen Zahlen scheint es mir zugleich auf eine evidente Art eine apriorische Aussage zu sein, so daß man, im Gegensatz zu der jetzt vorherrschenden Auffassung, die längst einer gründlichen Überprüfung bedürftig hätte, durch den gegenwärtigen Stand der mathematischen Logik auf eine Einordnung der Sätze der elementaren Zahlentheorie in die Klasse der synthetischen Aussagen a priori zurückgeführt wird. Es wird dann freilich nicht ausbleiben können, daß, wie der Verf. mit Recht bemerkt (S. 239), das Anwendungsproblem in diesem Falle zu den ungelösten Problemen zu rechnen ist. Scholz.

Novikov, P. S.: Über logische Paradoxa. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 56, 451—453 (1947) [Russisch].

Als absoluten logischen Kalkül bezeichnet Verf. einen typenfreien mehrstelligen Logikkalkül; als Axiome gelten nur die aussagenlogischen Identitäten; Schlussregeln sind die Abtrennungsregel und die üblichen Quantifizierungsregeln. Es leuchtet unmittelbar ein, daß dieser Kalkül widerspruchsfrei ist; D. A. Bočvar hat dies genauer ausgeführt [Mat. Sbornik, n. S. 15, 369 (1944); 16, 345 (1945)]. — In der vorliegenden Arbeit untersucht Verf. die Frage, welche Komprehensionsaxiome, also welche Ausdrücke der Form: $\mathcal{A}p(x_1) \dots (x_n) (p(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow G(x_1, \dots, x_n))$ zu diesem absoluten Kalkül hinzugenommen werden können, ohne daß der Formalismus widerspruchsvoll wird. Bei Hinzunahme aller Komprehensionsaxiome ergäbe sich natürlich u. a. die Russellsche Antinomie. Das Hauptresultat der Arbeit ist das folgende Theorem, das ohne Beweis mitgeteilt wird: Nennt man eine Variable eine innere Variable, wenn sie nur als Argumentvariable von prädikativen Ausdrücken vorkommt, und nennt man eine Variable eine äußere Variable, wenn sie

nur als Prädikatenvariable von prädikativen Ausdrücken vorkommt, so können zu dem absoluten Kalkül alle Komprehensionsaxiome hinzugenommen werden, bei denen in $G(x_1, \dots, x_n)$ jede Variable entweder eine innere oder eine äußere Variable ist; es darf also keine Variable sowohl als Argumentvariable als auch als Prädikatenvariable eines prädikativen Ausdruckes vorkommen. Bei diesen Überlegungen wird zusätzlich vorausgesetzt, daß in $G(x_1, \dots, x_n)$ außer x_1, \dots, x_n keine weiteren freien Variablen vorkommen. Ob sich dieses Resultat auch auf den Fall ausdehnen läßt, daß noch weitere freie Variablen vorkommen, darüber wird nichts mitgeteilt. — Es sei nun $G(x)$ ein Ausdruck mit der einzigen freien Variablen x , außerdem möge jede gebundene Variable von $G(x)$ entweder innere oder äußere Variable sein. $G(x)$ ist dann äquivalent mit einem Ausdruck der Form: $(G_1(x) \wedge x(x)) \vee (G_2(x) \wedge \overline{x(x)}) \vee G_3(x)$, wo $x(x)$ in $G_3(x)$ nicht vorkommt. Dann ist eine hinreichende Bedingung für die Widerspruchsfreiheit eines (ev. schon durch widerspruchsfreie Erweiterung aus dem absoluten System entstandenen) Systems T bei Hinzunahme von: $\mathcal{H}p(x) (p(x) \leftrightarrow G(x))$, daß der von Novikov als „paradoxe Folgerung“ bezeichnete Ausdruck $G_1(p) \vee G_2(\overline{p}) \vee G_3(p)$ in T ableitbar ist. — Die allgemeine Frage nach einem Verfahren, zu entscheiden, ob ein vorgelegtes Komprehensionsaxiom dem absoluten Kalkül widerspruchsvoll macht, läßt sich auf das Entscheidungsproblem für den Prädikatenkalkül der ersten Stufe zurückführen. Für den Fall der einstelligen Komprehensionsaxiome der Form: $\mathcal{H}p(x) (p(x) \leftrightarrow G(x))$, wo in $G(x)$ nur x als freie Variable vorkommt, wird diese Frage zum Abschluß der Untersuchungen vom Verf. gelöst durch Angabe einer notwendigen und hinreichenden Bedingung über die Ableitbarkeit von zwei effektiv angegebenen Ausdrücken in der absoluten Logik.

K. Schröter (Berlin).

Sobociński, Bolesław: L'analyse de l'antinomie russellienne par Leśniewski. I. Methodos, Milano 1, 94—107 (1949).

St. Leśniewski ist wahrscheinlich unter den polnischen Logikern zwischen den beiden Weltkriegen der profundeste. Leider sind seine Untersuchungen nur schwer zugänglich, da einmal wichtige Arbeiten von ihm nur polnisch erschienen sind und da außerdem, wie der Ref. weiß, viele Resultate unveröffentlicht und wahrscheinlich verloren gegangen sind. Um so wichtiger ist es, daß Verf., der letzte Assistent von Leśniewski, in diesem Aufsatz die Leśniewskische Analyse der Russellschen Paradoxie in einer ungewöhnlich klaren Weise veröffentlicht. Er stützt sich hierbei auf Unterlagen von Leśniewski selbst. Einige Ausführungen sind dem Ref. aus Vorträgen, die Leśniewski 1938 in Münster gehalten hat, bekannt gewesen. — Leśniewski hat bei seiner Analyse sein System der Ontologie zugrunde gelegt. Dieser Ontologie liegt (nach vielen Vereinfachungen, an denen Tarski und Sobociński wesentlich beteiligt sind) ein einziges Axiom zugrunde, das in der Schreibweise von Leśniewski folgendermaßen lautet:

$$[A b] :: A \varepsilon b. \equiv: [\mathcal{E} C] C \varepsilon A. C \varepsilon b.: [C D]: C \varepsilon A. D \varepsilon A. \supset . C \varepsilon D.$$

Hierbei ist „ $A \varepsilon b$ “ zu interpretieren als „ A ist b “; dieses „ist“ darf nicht verwechselt werden weder mit der Elementbeziehung noch mit der Eigenschaftsbeziehung. Das obige einzige Axiom der Ontologie lautet also: „ A ist b genau dann, wenn es wenigstens ein C gibt, das sowohl A als auch b ist und wenn es außerdem höchstens ein D gibt, das A ist“. Es ist klar, daß dieses Axiom weder für die Elementbeziehung noch für die Eigenschaftsbeziehung gilt; das ist schon deshalb nicht möglich, weil in „ A ist b “ beide Gegenstände A, b derselben semantischen Kategorie angehören. Es ist nicht schwer zu zeigen, daß das angegebene System der Ontologie (mit den zugehörigen aussagenlogischen und prädikatenlogischen Schlußweisen) widerspruchsfrei ist. Die Russellsche Antinomie kann also nicht etwa ihren Grund darin haben, daß sie in diesem System der Ontologie dargestellt wird. — In die Formulierung der Russellschen Antinomie geht nun als grundlegende Redeweise ein: „Die Klasse (oder

Menge) der a “, abgekürzt „ $Kl(a)$ “. Die übliche Elementbeziehung kann dann so definiert werden: $[A B]: B \varepsilon el(A) \equiv . [\mathcal{E}a]. A \varepsilon Kl(a). B \varepsilon a$. Die Russellsche Antinomie ergibt sich dann aus folgenden beiden Voraussetzungen:

A 1. $[a] . [\mathcal{E}A] . A \varepsilon Kl(a)$, A 2. $[A B a b]: A \varepsilon Kl(a) . A \varepsilon Kl(b) . B \varepsilon b . \supset . B \varepsilon a$. Es ist wichtig anzumerken, daß A 2 deduktionsgleich ist mit folgenden beiden Voraussetzungen:

B 1. $[A a B]: A \varepsilon Kl(a) . B \varepsilon a . \supset . B \varepsilon el(A)$, B 2. $[A a B]: A \varepsilon Kl(a) . B \varepsilon el(A) . \supset . B \varepsilon a$.

Es ergibt sich also, daß $\{A 1, A 2\}$ und ebenso $\{A 1, B 1, B 2\}$ widerspruchsvoll ist. — Um diesen Widerspruch zu beheben, liegt es nahe, A 1 abzuschwächen in: C 1. $[B a]: B \varepsilon a . \supset . [\mathcal{E}A] . A \varepsilon Kl(a)$. In diesem Fall ergibt sich jedoch — und das ist das erste Resultat von Leśniewski —, daß beweisbar wird:

$$[A B]: A \varepsilon A . B \varepsilon B . \supset . A = B.$$

Das abgeänderte System $\{C 1, A 2\}$ bzw. $\{C 1, B 1, B 2\}$ ist also zwar nicht mehr widerspruchsvoll, führt jedoch zu der unannehmbaren Konsequenz, daß es höchstens ein Individuum gibt. K. Schröter (Berlin).

Sobociński, Bolesław: L'analyse de l'antinomie russellienne par Leśniewski. II. *Methodos*, Milano 1, 220—228 (1949).

Nachdem B. Russell seine später nach ihm benannte Antinomie G. Frege mitgeteilt hatte, hat Frege (im Nachtrag zum 2. Bd. seiner „Grundgesetze der Arithmetik“, Jena 1903, S. 253ff.) einen Versuch zur Korrektur gemacht, der in der Ausdrucksweise des (vorsteh. besprochenen) Teiles I der vorliegenden Arbeit darin besteht, daß das dort angegebene Axiom A 2 durch das folgende schwächere ersetzt wird: E 1. $[A B a b]: A \varepsilon Kl(a) . A \varepsilon Kl(b) . B \varepsilon b . \sim (B \varepsilon Kl(b)) . \supset . B \varepsilon a$. — Im Teil II der Arbeit zeigt Verf.: Nimmt man zu dem früheren Axiom A 1 und dem jetzigen E 1 noch das folgende hinzu: E 2. $[A B a]: A \varepsilon Kl(a) . B \varepsilon Kl(a) . \supset . A = B$, so ergibt sich wieder die unannehmbare Konsequenz, daß es höchstens ein Individuum gibt. Ersetzt man schließlich A 1 außerdem noch durch das schwächere C 1, so ergibt sich, daß auch aus $\{C 1, E 1, E 2\}$ immer noch eine Beschränkung der Anzahl der Individuen folgt, nämlich daß es höchstens zwei Individuen gibt. — Diese beiden Resultate hat Leśniewski 1938 in einem seiner beiden Münsteraner Vorträge zum ersten Male bewiesen. Damit hat er als Erster und bisher Einziger 35 Jahre nach Frege dessen Untersuchungen wieder aufgenommen und gezeigt, daß der Fregesche Vorschlag zur Vermeidung der Russellschen Antinomie nicht stichhaltig ist. Schröter.

Gerneth, Dal Charles: Generalization of Menger's result on the structure of logical formulas. *Bull. Amer. math. Soc.* 54, 803—804 (1948).

Üblicherweise werden die Ausdrücke im Aussagenkalkül rekursiv bestimmt. J. Łukasiewicz (nicht K. Menger, wie der Verf. behauptet) hat als Erster für den C-N-Kalkül eine nicht rekursive Bestimmung für die Ausdrücke angegeben. In dem vorliegenden Aufsatz überträgt Verf. die Łukasiewicz'sche Charakterisierung auf Ausdrücke eines beliebigen (auch mehrstellige Funktoren enthaltenden) Aussagenkalküls. Das Resultat ist vollständig enthalten in der Arbeit des Ref. „Axiomatisierung der Fregeschen Aussagenkalküle“ (dies. Zbl. 28, 101). Dort wird darüber hinaus auch das Łukasiewicz'sche Rechenverfahren zur Entscheidung, ob eine vorgegebene Zeichenreihe ein Ausdruck ist, auf Ausdrücke eines beliebigen Aussagenkalküls übertragen. Daß die Ausdrücke auch ohne Rekursion charakterisiert werden können, folgt übrigens (was der Verf. ebenfalls nicht bemerkt) aus der Tatsache, daß jede rekursive Definition in der Semiotik in eine explizite umgeformt werden kann. K. Schröter (Berlin).

Ridder, J.: Über mehrwertige Aussagenkalküle und mehrwertige engere Prädikatenkalküle. II. *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* 51, 836—845 (1948).

Nachdem Verf. in seinem ersten Beitrag (dies. Zbl. 30, 386) in Analogie zur Booleschen Algebra einen 4-wertigen Aussagenkalkül, der sich in naheliegender Weise auch $2^m \times 2^n$ -wertig (m, n natürliche Zahlen) deuten läßt, konstruiert hat, führt er nun dasselbe Programm für einen 8-wertigen Kalkül mit den Werten $\lambda, \nu, \lambda_2, \nu_2, \lambda_3, \nu_3, \lambda_4, \nu_4$ durch. Es erübrigt sich, auf Einzelheiten einzugehen, da alles genau so wie im ersten Teil der Arbeit verläuft. Selbstverständlich kann der so erhaltene Kalkül auch $2^m \times 2^n \times 2^p$ -wertig gedeutet werden (vgl. zur Kritik dieser Behauptung die Anzeige des ersten Teils dieser Arbeit). Außerdem läßt sich natürlich zu jedem bisher betrachteten Aussagenkalkül in bekannter Weise ein Prädikatenkalkül der ersten Stufe ohne Identität konstruieren. *K. Schröter* (Berlin).

Ridder, J.: Über mehrwertige Aussagenkalküle und mehrwertige engere Prädikatenkalküle. III. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 51, 991—995 (1948).

In diesem III. Teil seiner Beiträge über mehrwertige Aussagenkalküle und mehrwertige Prädikatenkalküle baut Verf. mit den gleichen Methoden wie in den beiden ersten Teilen seiner Arbeit (vgl. dies. Zbl. 30, 386 und vorsteh. Referat) einen durch das Beckersche Zusatzaxiom $Np \rightarrow NNp$ erweiterten Lewisschen Aussagenkalkül auf. Auch der so erhaltene Kalkül soll nach dem Verf. 2^m -wertig sein. Zum Abschluß seiner Untersuchungen weist Verf. darauf hin, daß nach den gleichen Methoden auch ein $2^m \times \dots \times 2^p$ -wertiger durch N (Notwendigkeit) und M (Möglichkeit) erweiterter Lewisscher Aussagenkalkül aufgebaut werden kann. — Es liegt hier, wie schon in den früheren Untersuchungen, eine gewisse Verwirrung vor. Das liegt daran, daß nach der Meinung des Verf. ein Kalkül schon dann m -wertig ist, wenn es eine m -wertige Matrix gibt, deren Erfüllungsmenge sämtliche Kalkülsätze enthält. Das genügt aber nicht. Vielmehr muß die Matrix adäquat sein (dieser Begriff kommt in der ganzen Arbeit nicht vor), d. h. es dürfen auch umgekehrt nur die Kalkülsätze die m -wertige Matrix erfüllen, wenn der Kalkül m -wertig sein soll. *K. Schröter* (Berlin).

Suranyi, Janos: Reduction of the decision problem to formulas containing a bounded number of quantifiers only. Proc. 10. internat. Congr. Philos., Amsterdam 1948, 2, 759—762 (1949).

In dem vorliegenden Vortrag wird gezeigt, daß es zu jedem Ausdruck H des Prädikatenkalküls der ersten Stufe je einen erfüllbarkeitsgleichen von jeder der folgenden Formen gibt:

- | | |
|--|--|
| (1) a) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x \exists y H_1$ | b) $\forall x_1 \forall x_2 \exists y \forall x H_2$ |
| (2) a) $\forall x \exists y \exists y_1 \forall x_1 \forall x_2 H_3$ | b) $\exists y \forall x \exists y_1 \forall x_1 \forall x_2 H_4$ |
| (3) a) $\forall x \exists y \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 \exists y_4 \forall x_1 H_5$ | b) $\exists y \forall x \exists y_1 \exists y_2 \exists y_3 \exists y_4 \forall x_1 H_6$ |

In sämtlichen Kernen $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6$ kommen hierbei nur ein- und zweistellige Prädikatenvariablen vor. Im Fall (2) kann darüber hinaus die Anzahl der zweistelligen Variablen ≤ 7 vorausgesetzt werden. Im Fall (3) muß jedoch zugelassen werden, daß im Kern die Identität vorkommt (was in den Fällen (1) und (2) nicht erforderlich ist); dagegen kann die Anzahl der zweistelligen Variablen im Fall (3) sogar ≤ 4 angenommen werden. — Sämtliche Resultate sind Verschärfungen der bekannten Skolemschen Normalform, wobei sowohl die Anzahl der generalisierten als auch die der partikularisierten Variablen beschränkt ist. Die Resultate sind deshalb bemerkenswert, weil bisher nur Normalformen bekannt waren, bei denen die Anzahl einer Sorte von quantifizierten Variablen beschränkt ist. *K. Schröter*.

Fitch, Frederic B.: Intuitionistic modal logic with quantifiers. Portugaliae Math. 7, 113—118 (1948).

Verf. erweitert das bekannte Heytingsche System des intuitionistischen Aussagenkalküls zu einem modalen intuitionistischen Prädikatenkalkül der ersten Stufe mit den beiden modalen Funktoren \Diamond (Möglichkeit) und \Box (Notwendigkeit). — Die Ausdrucksbestimmungen werden so gewählt wie bei Ruth C. Barcan [J. sym-

bolic Logic 11, 1—16 (1946)]. Sind dann A , B irgendwelche Ausdrücke, so wählt Verf. die folgenden zusätzlichen Axiomenschemata: (1) $\Box A \supset A$ und $A \supset \Diamond A$; (2) $\Box (A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$ und $\Box (A \supset B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B)$; (3) $(\alpha) A \supset B$ und $B \supset (\exists \alpha) A$; hierbei geht B dadurch aus A hervor, daß die Individuenvariable α an allen Stellen, an denen sie frei in A vorkommt, durch β ersetzt wird; allerdings darf α in keinem Wirkungsbereich von β in A vorkommen;

(4) $(\alpha) (A \supset B) \supset ((\alpha) A \supset (\alpha) B)$ und $(\alpha) (A \supset B) \supset ((\exists \alpha) A \supset (\exists \alpha) B)$;
 (5) $A \supset (\alpha) A$ und $(\exists \alpha) A \supset A$; hierbei darf α nicht frei in A vorkommen;
 (6) $(\alpha) \Box A \supset \Box (\alpha) A$ und $\Diamond (\exists \alpha) A \supset (\exists \alpha) \Diamond A$. Schlußregeln sind in dem System von Fitch: (1) Die Abtrennungsregel für \supset , (2) Die Regel der Notwendigkeit: Wenn A Axiom ist, so $\Box A$, (3) Die Regel der Generalisierung: Wenn A Axiom ist, so $(\alpha) A$. — Verf. gibt für sein System eine Reihe von naheliegenden Ableitungen an; ferner beweist er einige einfache Theoreme, z. B. das Deduktionstheorem und das Ersetzbarkeitstheorem für äquivalente Ausdrücke. Eine eingehendere wissenschaftstheoretische Untersuchung, die erst den Titel „intuitionistic modal logic“ rechtfertigen würde, wird allerdings nicht durchgeführt. Verf. beschränkt sich hier im wesentlichen auf einen Vergleich seines Systems mit den bisher vorliegenden (ebenfalls noch nicht genauer untersuchten) Systemen modaler intuitionistischer Logiken von C. I. Lewis und Ruth C. Barcan (siehe oben). Obwohl diese wissenschaftstheoretische Untersuchung fehlt, scheint es, daß das hier vorgelegte System sich besonders gut in die Heytingschen und Brouwerschen Gedankengänge einfügt.

K. Schröter (Berlin).

Kleene, S. C.: On the intuitionistic logic. Proc. 10. internat. Congr. Philos., Amsterdam 1948, 2, 741—743 (1949).

Verf. hat in seiner Arbeit: „On the interpretation of intuitionistic number theory. J. symbolic Logic 10, 109—124 (1945)“ die Redeweise eingeführt: „Der Ausdruck H der elementaren Zahlentheorie ist rekursiv realisierbar“. David Nelson [Trans. Amer. math. Soc. 61, 307—368 (1947)] hat dann gezeigt, daß jeder intuitionistisch beweisbare Ausdruck der elementaren Zahlentheorie auch rekursiv realisierbar ist. (Der Ref. macht darauf aufmerksam, daß die Umkehrung dieses Satzes, auf Grund deren erst von einer „Interpretation“ der intuitionistischen Zahlentheorie gesprochen werden kann, bisher noch nicht bewiesen ist.) Aus dem Nelsonschen Satz folgt unmittelbar, daß jeder zahlentheoretische Ausdruck, der aus einem intuitionistisch beweisbaren Ausdruck des Prädikatenkalküls der ersten Stufe durch Einsetzung entsteht, rekursiv realisierbar ist. Auf Grund dieser Bemerkung ergeben sich ohne weiteres Unableitbarkeitsbeweise im intuitionistischen Prädikatenkalkül, z. B. ergibt sich die intuitionistische Unableitbarkeit von $\neg \neg (x) (A(x) \vee \neg A(x))$ [Dieses Resultat war übrigens schon Heyting (S.-B. Preuß. Akad. Wiss. phys.-math. Kl. 1930, 42—56, 57—71, 158—169) bekannt]. Verf. deutet nun einen anderen Beweis für die gleiche Unableitbarkeit an, der sich auf den sog. Gentzenschen Hauptsatz [Math. Z. 39, 176—210, 405—431 (1934); dies. Zbl. 10, 145, 146] stützt. Es scheint dem Ref., daß der neue Beweis im wesentlichen eine Umformung des Nelsonschen Beweises ist; ähnliche Umformungen nicht elementarer Beweise mit Hilfe des Gentzenschen Hauptsatzes sind oft möglich (vgl. Hilbert-Bernays II., S. 157ff.). Verf. gibt dann noch zwei weitere prädikatenlogische Ausdrücke an, die er nach der gleichen Methode als intuitionistisch nicht ableitbar festgestellt hat, nämlich $(x) (A \vee B(x)) \supset A \vee (x) B(x)$ und $\neg \neg (y) ((x) (A(y) \vee B(x)) \supset A(y) \vee (x) B(x))$, dagegen ist $\neg \neg ((x) (A \vee B(x)) \supset A \vee (x) B(x))$ intuitionistisch ableitbar. K. Schröter.

Longh, J. J. De: Restricted forms of intuitionistic mathematics. Proc. 10. internat. Congr. Philos., Amsterdam 1948, 2, 744—748 (1949).

In diesem Vortrag berichtet Verf. über die verschiedenen Schwierigkeiten bei einer intuitionistischen Interpretation der Implikation. Versuche, diese Schwierig-

keiten zu überwinden, wurden besonders von Heyting, H. Freudenthal [Compositio Math., Groningen 4, 112—116 (1937)] und G. F. C. Griss [Proc. Akad. Wet. Amsterdam 49, 1127—1134 (1946)] gemacht. Verf. selbst scheint der sog. signifikanten Begründung der Mathematik nahe zu stehen, wie sie von G. Mannoury [Erkenntnis 4, 288—309, 317—345 (1934); dies. Zbl. 10, 147] begründet und von van Dantzig [On the principles of intuitionistic and affirmative mathematics. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 50, 918—930, 1092—1104 (1947)] weiter ausgebaut wurde. Verf. analysiert in seinem Vortrag von diesem Standpunkt aus die verschiedenen Grade der „Direktheit“ des Begriffes der Konvergenz einer Folge. Hierbei scheint dem Ref. besonders fruchtbar der von van Dantzig eingeführte Begriff der „stable proposition“ zu sein, das sind Aussagen, die mit ihrer doppelten Negation intuitionistisch äquivalent sind.

K. Schröter (Berlin).

Goodstein, R. L.: Proof by reductio ad absurdum. Math. Gaz., London 28, 198—204 (1948).

Dieser 1947 auf dem „General Meeting of the Mathematical Association“ gehaltene Vortrag ist eine recht instruktive Abhandlung über die Methode der indirekten Beweise und über die mit ihr zusammenhängenden Grundlagenfragen. Besonders lehrreich sind einige Umformungen indirekter Beweise in direkte. — Allerdings mußte, nach der Meinung des Ref., bei derartigen Untersuchungen, wenn sie zu einer Klärung führen sollen, das logische Gerüst stärker hervorgehoben werden. Ein indirekter Beweis ist keineswegs schon dadurch charakterisiert, daß bei ihm z. B. von der Kontraposition oder vom Tertium non datur Gebrauch gemacht wird. Wahrscheinlich ist die ganze Einteilung in direkte und in indirekte Beweise zunächst nur historisch verständlich (ähnlich wie die logisch allerdings belanglose Einteilung in analytische, synthetische, a priorische und a posteriorische Urteile). Das logisch Entscheidende dürfte bei den direkten Beweisen sein, daß bei ihnen nur von der positiven Logik (im Sinne von Hilbert-Bernays), die mit der intuitionistischen zusammenfällt, Gebrauch gemacht wird. Wenn das der Fall ist, so sind in dem vorliegenden Aufsatz gewisse Ausführungen (ähnlich wie in fast allen dem Ref. bekannten Arbeiten anderer Autoren über indirekte Beweise) zu präzisieren bzw. klarzustellen.

K. Schröter (Berlin).

Pólya, G.: On patterns of plausible inference. Studies Essays, pres. to R. Courant, 277—288 (1948).

Mit dem Ziel, eine „Logik des plausiblen Schließens“ aufzubauen, wird ein Zugang zum systematischen Studium des heuristischen Denkens gesucht. Am Beispiel der Vermutung, daß Symmetrisierung die Kapazität vermindert [sie wurde nebenbei von G. Pólya und G. Szegő in Amer. J. Math. 67, 1—32 (1945) bewiesen], wird gezeigt, daß induktive Schlußweisen, wie sie in den experimentellen Wissenschaften verwendet werden, auch als heuristische Hilfsmittel zur Entdeckung neuer mathematischer Tatsachen eine wichtige Rolle spielen. Es werden sodann mehrere Schemata plausiblen Schließens, „heuristische Syllogismen“, formuliert. Angeführt seien die beiden folgenden, die dem Modus tollens und Modus ponens der beweisenden Logik verwandt sind: 1. (Bestätigung einer Konsequenz) Wenn B aus A folgt und B wahr ist, so ist A glaubwürdiger. 2. (Ausschaltung eines möglichen Grundes) Wenn A aus B folgt und B falsch ist, so ist A weniger glaubwürdig.

Bachmann (Kiel).

Pólya, G.: Preliminary remarks on a logic of plausible inference. Dialectica, Neuchâtel 3, 28—35 (1949).

Das plausible Schließen wird an Beispielen aus der Mathematik, dem erfindenden Denken und dem täglichen Leben untersucht. Der erste, im vorstehenden Referat angeführte heuristische Syllogismus wird diskutiert. Einige weiterführende Gedanken werden als „Desiderata“ formuliert und der Zusammenhang der Untersuchung mit der philosophischen Diskussion die Wahrscheinlichkeit angedeutet.

Bachmann (Kiel).

Hagstroem, K.-G.: Connaissance et statistique. *Dialectica*, Neuchâtel 3, 153—172 (1949).

Den erkenntnistheoretischen Streitsatz, die uns auf Grund von Beobachtungen erscheinende „Wirklichkeit“ sei Grenzschemata abstrakt konstruierter Schemata, versucht Verf. durch Beispiele aus der messenden und der theoretischen Physik zu unterstützen. Zwei Beispiele, die Regressionstheorie linear abhängiger physikalischer Größen sowie die Heisenbergsche Unschärfebeziehung dienen zur Veranschaulichung der Beziehung von Erkenntnis und Zufall. *Szentmártony* (Budapest).

Loonstra, F.: Der Begriff Ordnung, insbesondere in der Mathematik. *Eulides*, Groningen 24, 226—242 (1949) [Holländisch].

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra. Polynome. Formen.

Korevaar, J. und P. A. J. Scheelbeek: Die Inverse einer Matrix. *Actual. Math. Centrum*, Amsterdam, Rapport ZTW 1949, 001, 5 S. (1949) [Holländisch].

Bestimmung der Inversen zu der t -reihigen Matrix $(a_{\sigma\tau})$ mit

$$a_{\sigma\tau} = \binom{n + \sigma - 1}{t + \tau} \quad (\sigma, \tau = 1, 2, \dots, t)$$

durch unmittelbare Berechnung der Determinante und der $(t-1)$ -reihigen Unterdeterminanten. *Specht* (Erlangen).

Hamburger, Hans Ludwig: A theorem on commutative matrices. *J. London math. Soc.* 24, 200—206 (1949).

Sind A , B n -reihige quadratische Matrizen, so ist nach einem bekannten Satz von Shoda [*Math. Z.* 29, 696—712 (1929)] genau dann B ein Polynom von A , wenn aus $MA = AM$ stets folgt $MB = BM$. Die vorliegende Arbeit zeigt, daß schon die folgende schwächere Voraussetzung genügt: Es ist $BA = AB$, und aus $MA = AM$, $M^2 = M$ folgt stets $MB = BM$. Dieses Ergebnis besagt geometrisch, daß eine lineare Transformation B des n -dimensionalen Vektorraums, die mit der Transformation A vertauschbar ist und jedes Paar komplementärer, gegenüber A invarianter Teilräume fest läßt, als Polynom von A dargestellt werden kann.

Wielandt (Mainz).

Leavitt, William and George Whaples: On matrices with elements in a principal ideal ring. *Bull. Amer. math. Soc.* 55, 117—118 (1948).

Es handelt sich um folgenden Satz: Liegen die Nullstellen des charakteristischen Polynoms einer Matrix A mit Elementen aus einem Hauptidealring \mathfrak{h} sämtlich in \mathfrak{h} , so ist A mittels einer unimodularen Matrix T mit Elementen aus \mathfrak{h} ähnlich zu einer Matrix $B = T^{-1}AT$, die unterhalb der Hauptdiagonale nur Nullen aufweist. Ein von Leavitt (dies. Zbl. 30, 252) für den Fall, daß \mathfrak{h} aus allen auf einem beschränkten abgeschlossenen Gebiet der komplexen Ebene konvergenten Potenzreihen besteht, gegebener Beweis wird in naheliegender Weise algebraisiert und sodann ein weiterer mitgeteilt, der die Jordansche Normalform von Matrizen mit Elementen aus einem kommutativen Körper heranzieht. Die Hauptidealeigenschaft von \mathfrak{h} wird zu dem Schluß benutzt, daß jeder gleichrangige Untermodul \mathfrak{N} eines n -rangigen \mathfrak{h} -Moduls $\mathfrak{M} = \mathfrak{h}\mu_1 + \dots + \mathfrak{h}\mu_n$ eine \mathfrak{h} -Basis v_1, \dots, v_n mit $v_i = \sum_{j=1}^i a_{ij}\mu_j$ mit $a_{ij} \in \mathfrak{h}$ ($i = 1, \dots, n$) besitzt.

Grell (Berlin).

Mayer, Walther: The linear mappings of the E_n into itself. *Mh. Math.*, Wien 53, 42—52 (1949).

Es wird die Klassifikation der linearen Transformationen eines n -dimensionalen Vektorraumes hinsichtlich Äquivalenz (σ_1 heißt äquivalent zu σ_2 , wenn $\sigma_1 = \tau \sigma_2 \tau^{-1}$ mit nicht-singulärem τ gilt) behandelt, und zwar, worauf besonderer Wert gelegt wird, ohne Benutzung von Koordinaten oder Matrizen. Als wesentliche Hilfsmittel

werden die Eigenschaften des Minimalpolynoms, seiner Teiler und der zugehörigen invarianten Teilgebilde herangezogen. Die bekannte Theorie wird in geschickter Modifizierung bis zur Verwirklichung der methodischen Absicht fortgeführt. Indessen wird zur Gewinnung der Invarianten, welche eine lineare Transformation σ bis auf äquivalente kennzeichnen, eine besondere Basis konstruiert, die samt ihren Bildvektoren in enger Beziehung zu den Teilern des Minimalpolynoms steht, was nun doch der Aufstellung einer Normalform der Matrix von σ unmittelbar gleichwertig ist. Der Beweisgang ist mehr geometrisch und direkter hinsichtlich des gesteckten Zieles als die tiefere und umfassendere Methode der verallgemeinerten abelschen Gruppen von Krull [S.-B. Heidelberger Akad. Wiss. math.-naturw. Kl. 1926, Nr. 1], welche der Koordinaten und Matrizen auch nicht bedarf. *Sperner (Bonn).*

Hua, Loo-Keng: Geometry of symmetric matrices over any field with characteristic other than two. Ann. Math., Princeton, II. S. 50, 8—31 (1949).

Es sei $E_n = E$ die n -reihige Einheitsmatrix,

$$\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{E} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Ein Paar (X, Y) von n -reihigen Matrizen X, Y aus Größen eines Körpers K beliebiger Charakteristik $\neq 2$ heißt regulär symmetrisch, wenn (X, Y) den Rang n hat und $(X, Y) \mathfrak{F} (X, Y)' = 0$ ist. Wie immer ist M' die Transponierte zu M . Zwei reguläre symmetrische Paare $(X, Y), (X_1, Y_1)$ gehören zur gleichen Klasse, wenn mit einer regulären Matrix Q $(X_1, Y_1) = Q(X, Y)$ ist. Eine Klasse regulärer symmetrischer Paare heißt Punkt im projektiven Raum der symmetrischen Matrizen. Diese Festsetzungen bezwecken lediglich eine „Homogenisierung“ oder projektive Abschließung im Raum der symmetrischen Matrizen über K . Als Abstand zweier Punkte P, P_1 wird der Rang der Matrix $|P, P_1| = \text{Rang}((X, Y) \mathfrak{F} (X_1, Y_1))$ bezeichnet; der Abstand ist unabhängig von der Wahl des Klassenvertreters und ist nur Null, wenn die Punkte gleich sind. — Die vom Verf. behandelte Frage ist nun die Bestimmung aller Transformationen des projektiven Raumes der symmetrischen Matrizen auf sich, die den Abstand invariant lassen. Für $n > 1$ ist jede derartige Transformation von der Gestalt $(X_1, Y_1) = Q(X^\sigma, Y^\sigma) \mathfrak{Z}$ mit einer regulären n -reihigen Matrix Q , einem Automorphismus σ von K , einer $2n$ -reihigen Matrix \mathfrak{Z} , die der Gleichung $\mathfrak{Z} \mathfrak{F} \mathfrak{Z}' = a \mathfrak{F}$ genügt mit einem a aus K . Dabei ist a nur bis auf einen quadratischen Faktor aus K festgelegt. — Durch Übergang zur „inhomogenen“ Schreibweise folgt hieraus der Satz: Σ sei die Menge aller n -reihigen symmetrischen Matrizen mit $n \geq 2$ über dem Körper K einer Charakteristik $\neq 2$. Eine Abbildung von Σ auf sich, die den Rang der Differenz zweier symmetrischer Matrizen invariant läßt, hat die Gestalt $Z_1 = a A Z^\sigma A' + S$ mit einer regulären Matrix A , einem symmetrischen S , einer Größe a aus K und einem Automorphismus σ von K . — Da zwischen zwei Punkte P, Q vom Abstand p immer Punkte X_1, X_2, \dots, X_{p-1} eingeschaltet werden können, derart, daß $|P, X_1| = |X_1, X_2| = \dots = |X_{p-1}, Q| = 1$ ist, kann die Invarianzforderung des Satzes noch auf den Abstand 1 abgeschwächt werden.

Specht (Erlangen).

Wielandt, Helmut: Die Einschließung von Eigenwerten normaler Matrizen. Math. Ann., Berlin 121, 234—241 (1949).

Zu einer normalen Matrix L seien zwei nicht proportionale Spalten $y = \{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ und $z = \{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$ mit $Ly = z$ bekannt. Verf. setzt sich das Ziel, sämtliche aus der Kenntnis von y und z folgenden Einschränkungen des Spektrums der charakteristischen Zahlen λ von L zu ermitteln. Die komplexen Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ heißen ein mit dem Spaltenpaar y, z verträgliches Spektrum, wenn es eine normale Matrix L mit $Ly = z$ und $\det(\lambda E - L) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$ gibt. Bei Einführung der Momente:

$$m_{00} = \sum_1^n |\eta_\nu|^2 > 0, \quad m_{01} = \sum_1^n \eta_\nu \bar{\zeta}_\nu, \quad m_{11} = \sum_1^n |\zeta_\nu|^2 > 0$$

gilt: Dann und nur dann sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ein mit y, z verträgliches Spektrum, wenn das Gleichungssystem:

$$\sum_1^n p_\nu = 1, \quad \sum_1^n p_\nu \lambda_\nu = \frac{m_{01}}{m_{00}}, \quad \sum_1^n p_\nu |\lambda_\nu|^2 = \frac{m_{11}}{m_{00}}$$

durch reelle nichtnegative Zahlen p_ν gelöst werden kann. Ordnet man in einem räumlichen rechtwinkligen $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ -Achsensystem einer komplexen Zahl $\lambda = \lambda' + i\lambda''$ den Punkt $P(\lambda) = \{\lambda', \lambda'', |\lambda|^2\}$ und dem Spaltenpaar (y, z) den Momentenpunkt $M = \{\Re m_{01}/m_{00}, \Im m_{01}/m_{00}, m_{11}/m_{00}\}$ zu, so erhält man die übersichtliche geometrische Deutung: Dann und nur dann bilden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ein mit y, z verträgliches Spektrum, wenn der durch y, z bestimmte Momentenpunkt zur konvexen Hülle der Punkte $P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)$ gehört. Zwei mit demselben Spaltenpaar verträgliche Spektren können in der Gaußschen Ebene nicht durch einen Kreis oder eine Gerade in strengem Sinne getrennt werden. Es folgen weitere geometrische Ausdeutungen durch Übergang vom Rotationsparaboloid $\lambda''' = \lambda'^2 + \lambda''^2$ zu einer Kugel mit Hilfe einer projektiven Abbildung, wobei es notwendig wird, auch uneigentliche Spektren ($\lambda = \infty$) mit in Betracht zu ziehen. Eine Teilmenge \mathfrak{E} der komplexen Vollebene heißt Einschließungsmenge, wenn sie aus jedem mit y, z verträglichen Spektrum mindestens einen Wert enthält. Im Falle $n \geq 4$ ist eine Teilmenge der Riemannschen Zahlenkugel \mathfrak{R} dann und nur dann eine Einschließungsmenge, wenn sie eine genaue Halbkugel (dies wird noch präzisiert) enthält. Es folgen Bemerkungen über Verwertung zusätzlicher Vorkenntnisse und numerische Verwendbarkeit der Einschließungssätze.

Collatz (Hannover).

Souriau, Jean-Marie: Une méthode pour la décomposition spectrale et l'inversion des matrices. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 1010—1011 (1948).

Zu einer quadratischen Matrix A des Grades n mit dem charakteristischen Polynom $P(x) = |xE - A| = x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n$ bilde man rekursiv die Matrizen $B_k = A B_{k-1} - \frac{1}{k} \sigma(A B_{k-1}) E$ ($k = 1, 2, \dots, n$) mit $B_0 = E$, der Einheitsmatrix des Grades n als Anfangswert. $\sigma(M)$ bezeichnet dabei die Spur der Matrix M . Dann gilt für die Koeffizienten des Polynoms $P(x)$ $p_k = -\frac{1}{k} \sigma(A B_{k-1})$.

Die Matrix B_n verschwindet; wenn A regulär ist, ist $A^{-1} = -\frac{1}{p_n} B_{n-1}$. Ferner gilt $(xE - A)Q(x) = P(x)E$ mit dem Polynom $Q(x) = x^{n-1} B_0 + x^{n-2} B_1 + \dots + B_{n-1}$, so daß die Frobeniusschen Kovarianten zu den Eigenwerten α_ν von A in der Gestalt $Q(\alpha_\nu)$ erscheinen. — Diese Entwicklungen gestatten wesentlich vereinfachte numerische Rechnungen für die Aufgabe der Spektralzerlegung der Matrix A oder für die Berechnung der Inversen oder der Adjungierten zu A . Specht (Erlangen).

Bäbler, F.: Über einen Satz aus der Theorie der Kristallklassen. Comment. math. Helvetici 20, 65—67 (1947).

Ist T eine Matrix mit von Null verschiedener Determinante, so ist $P = T T'$ symmetrisch und hat nur positive Elementarteiler, denn P ist die Matrix der positiv definiten Form $\sum_\mu \left(\sum_\nu t_{\nu\mu} x_\nu \right)^2$. Es läßt sich also reell Q mit $Q^2 = P$ bilden, auch Q soll positive Elementarteiler haben. $S = Q^{-1} T$ ist dann orthogonal, und wenn A und B orthogonal sind mit $T^{-1} A T = B$, so gilt auch $S^{-1} A S = B$. — We den also die orthogonalen Matrizen $A_i, i = 1, 2, \dots, k$ durch die reelle Matrix T in die ebenfalls orthogonalen B_i transformiert, so leistet die orthogonale Matrix S das gleiche. Man erhält so einen elementaren Beweis des bekannten Satzes: Sind zwei Kristallklassen reell äquivalent, so sind sie auch reell-orthogonal äquivalent. Bol.

Cherubino, Salvatore: Forma quasi-canonica delle matrici. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. S. 2, 151—166 (1950).

Die „quasi-kanonische“ Form einer n -reihigen quadratischen Matrix $A = ||a_{ik}||$ mit komplexen Elementen a_{ik} nennt Verf. eine Halbmatrix (unterhalb der Haupt-

diagonale stehen nur Nullen), in deren Hauptdiagonale die Eigenwerte oder charakteristischen Wurzeln entsprechend ihrer Vielfachheit stehen und die an Stelle der Einsen-Serien, die bei der Jordanschen Normalform von A auftreten, quadratische Matrizen enthält, deren Reihenzahlen die Signatur der verschiedenen Eigenwerte angeben. In Anlehnung an eine frühere Arbeit [Atti. Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. fisic. mat. natur., VI. S. 23, 478—482, 647—653 (1936); dies. Zbl. 14, 338] und gestützt auf die Ausführungen in seinem Buche *Lezioni di geometria analitica* [Rom 1940; dies. Zbl. 26, 63] beweist Verf., daß es stets möglich sei, A mit Hilfe einer unitären Matrix V auf die quasi-kanonische Form $A^* = VAV_{-1}$ zu transformieren. Hierbei ist V_{-1} die Transponierte der zu V komplex-konjugierten Matrix \bar{V} , also $V\bar{V}_{-1} = I =$ Einheitsmatrix bei unitärem V . — Die Konstruktion von V bei einer antisymmetrischen Matrix ($A = \bar{A}_{-1}$), die als Koeffizientenmatrix einer Hermiteschen Form $x A \bar{x}_{-1}$ gelten kann, führt zum bekannten Satz von Sylvester-Hadamard abs. $|A| \leq n^{1/2} M^n$ mit der Verschärfung, daß das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn AA_{-1} eine Diagonalmatrix ist und die Elemente von A alle denselben Betrag M haben. Weitzenböck (Overveen).

Parodi, Maurice: Sur une méthode de formation du polynome ayant pour racines les sommes des racines de deux polynomes donnés. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1911—1913 (1949).

Sind A_m, B_n zwei quadratische Matrizen, E_m, E_n die Einheitsmatrizen der Grade m bzw. n , so sind die mittels der Kroneckerschen Komposition gebildeten Matrizen des Grades mn : $U = A_m \times E_n$ und $V = E_m \times B_n$ miteinander vertauschbar. Ist daher $\varphi(u, v)$ ein beliebiges Polynom zweier Unbestimmten u, v mit komplexen Koeffizienten, so besitzt die Matrix $\varphi(U, V)$ die Eigenwerte $\varphi(\alpha_\mu, \beta_\nu)$, wenn α_μ die Eigenwerte von A_m und β_ν die Eigenwerte von B_n darstellen. Wählt man also zu zwei vorgegebenen Polynomen $f(x), g(x)$ der Grade m, n zwei Matrizen A_m, B_n mit den charakteristischen Polynomen $|xE_m - A_m| = f(x), |xE_n - B_n| = g(x)$, so ist $|xE_{mn} - \varphi(U, V)| = h(x)$ das Polynom mit den Nullstellen $\varphi(\alpha_\mu, \beta_\nu)$. — Von diesem fast auf der Hand liegenden Satze bringt Verf. den Sonderfall $\varphi(u, v) = u + v$ mit Beispielen. Specht (Erlangen).

Meserve, Bruce Elwyn: Inequalities of higher degree in one unknown. Amer. J. Math. 69, 357—370 (1947).

Bezeichnen $g_1(x), \dots, g_s(x)$ reellwertige Polynome einer reellen Veränderlichen x , so bestimmt Verf. die Anzahl $K(a, b)$ größter Teilintervalle der (offenen) Menge aller x , für welche gleichzeitig $g_i(x) > 0$, $i = 1, \dots, s$, und $a < x < b$ ist (Fälle mit $a = -\infty$ oder $b = +\infty$ inbegriffen). Für $K(a, b)$ werden Abschätzungen gegeben, u. a. solche, in welchen die Zahlen $K_i(a, b)$ (K_i ist die K entsprechende Anzahl für die einzige Ungleichung $g_i > 0$), $i = 1, \dots, s$, eingehen. $K(a, b)$ läßt sich durch rationale Operationen (einschließlich Differentiation) an den g_i berechnen; Hilfsmittel dabei sind Sturmsche Ketten in Verbindung mit einem Cauchy-Sylvesterschen Satz [vgl. C. F. Gummer, The relative distribution of the real roots of a system of polynomials, Trans. Amer. math. Soc. 23, 265—282 (1922)].

Aumann (Würzburg).

Tibiletti, Cesarina: Una condizione caratteristica per le equazioni di quarto grado risolubili elementarmente. Periodico Mat., IV. S. 25, 214—223 (1947).

Die Auflösung einer biquadratischen Gleichung kann geometrisch als die Bestimmung der vier Schnittpunkte zweier Kegelschnitte C_1, C_2 in der Ebene gefaßt werden. Die Auflösung der kubischen Resolvente entspricht dabei der Bestimmung der drei zerfallenden Kegelschnitte des durch C_1, C_2 bestimmten Büschels. Dafür, daß eine biquadratische Gleichung durch quadratische Radikale allein auflösbar ist, ist notwendig und hinreichend, daß ein Kegelschnitt Γ rational bestimmt

werden kann, der beide Kegelschnitte C_1, C_2 zweifach berührt. — Weitere Ausdeutungen dieses Ergebnisses in der ebenen bzw. räumlichen Geometrie. *Specht.*

Szele, T.: Ein Beweis des Ruffini-Abelschen Satzes. *Comment. math. Helvetici* **20**, 268—269 (1947).

Zum Beweis der Nichtauflösbarkeit der allgemeinen Gleichung n -ten Grades für $n \geq 5$ genügt nach Kalmár (dies. Zbl. **5**, 152) der Nachweis, daß \mathfrak{A}_n keinen Normalteiler von Primzahlindex besitzt. Verf. gibt einen neuen Beweis dieser Eigenschaft von \mathfrak{A}_n und zugleich der Tatsache, daß \mathfrak{S}_n für $n \geq 5$ keinen Normalteiler von Primzahlindex außer \mathfrak{A}_n besitzt. — Vor.: $\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_n$ oder \mathfrak{A}_n , \mathfrak{N} ein Normalteiler von \mathfrak{G} mit abelscher Faktorgruppe. Beh.: \mathfrak{N} enthält alle Dreierzyklen, d. h. $\mathfrak{N} = \mathfrak{A}_n$. Beweis: Wenn A und B beliebig aus \mathfrak{G} , so ist $AB = BAN$ mit N aus \mathfrak{N} . Wählt man speziell $A = (abc)$, $B = (ab)(de)$, wo d und e von a, b, c verschiedene (wegen $n \geq 5$ vorhandene) Elemente bedeuten, so ist

$$N = A^{-1}B^{-1}AB = A^{-1}A^2 = A$$

aus \mathfrak{N} , w. z. b. w.

H. L. Schmid (Berlin).

Todd, J. A.: A note on the algebra of S -functions. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **45**, 328—334 (1949).

Die von D. E. Littlewood begründete Algebra der S -Funktionen hat sich in verschiedenen algebraischen Problemen als sehr nützlich erwiesen; besonders wichtig ist die Berechnung des symbolischen Produktes $\{\mu\} \otimes \{\nu\}$ von zwei S -Funktionen $\{\mu\}, \{\nu\}$ der Grade m, n . In der vorliegenden Abhandlung betrachtet Verf. das Produkt $\{\mu\} \otimes S_n$, wo S_n die Summe $\sum \alpha_i^n$ der n -ten Potenzen der Argumente α_i bedeutet. Dieses Produkt hat einen wohlbestimmten Sinn, da S_n , wie jedes symmetrische homogene Polynom des Grades n der Argumente α_i , als eine Summe von S -Funktionen des Grades n ausgedrückt werden kann. Verf. zeigt, daß das Produkt $\{\mu\} \otimes S_n$ als eine Summe von S -Funktionen des Grades mn durch einfache kombinatorische Rechnungen ausgedrückt werden kann. Als Beispiel wird der Fall $m = n = 3$ vollständig behandelt und in einer einfachen Tabelle zusammengefaßt. Es folgt die Ausrechnung aller möglichen Produkte von zwei der drei S -Funktionen dritten Grades $\{3\}, \{21\}, \{1^3\}$, als Anwendung der Formeln, die diese drei Funktionen durch S_1, S_2, S_3 ausdrücken. Schließlich die Reduktion der Ausrechnung von $\{m\} \otimes S_n$ auf diejenigen von $\{m\} \otimes S_{n-1}$ und $\{m-1\} \otimes S_n$. *E. G. Togliatti.*

Jones, Burton W. and William H. Durfee: A theorem on quadratic forms over the ring of 2-adic integers. *Bull. Amer. math. Soc.* **55**, 758—762 (1949).

Es seien $f = f(x_1, \dots, x_n), g = g(x_{n+1}, \dots, x_{n+s}), h = h(x_{n+1}, \dots, x_{n+t})$ quadratische Formen mit nicht singulären Koeffizienten-Matrizen. Die Koeffizienten mögen einem Körper k mit von 2 verschiedener Charakteristik angehören. Nach E. Witt [J. reine angew. Math. **176**, 31—44 (1936); dies. Zbl. **15**, 57] gilt: wenn $f + g$ in $f + h$ in k transformierbar ist, so ist g in h in k transformierbar. Der Satz bleibt gültig, wenn k ersetzt wird durch den Integritätsbereich der ganzen p -adischen Zahlen, p eine ungerade Primzahl, jedoch i. a. nicht wenn $p = 2$. Verff. geben hinreichende Bedingungen an, unter denen diese Verschärfung des Wittschen Satzes auch für $p = 2$ richtig ist.

Eichler (Münster).

Gruppentheorie:

Châtelet, Albert: Algèbre des relations de congruence. *Ann. sci. École norm. sup.*, III. S. **64**, 339—368 (1947).

Der Verfeinerungssatz von Schreier läßt sich für Gleichheitsrelationen beliebiger Mengen E statt für Untergruppen von Gruppen aussprechen [A. Châtelet, dies. Zbl. **31**, 8, P. Lorenzen, *Math. Z.* **49**, 647—653 (1944)]. Verf. zeigt, daß die Zassenhau'sche Konstruktion auch für gewisse Bereiche von Relationen, deren jede

nur über einer Untermenge von E Gleichheitsrelation ist, anwendbar bleibt. Dadurch läßt sich der Verfeinerungssatz auf Hypergruppen und Ketten aus gewissen Bereichen von Unterhypergruppen ausdehnen. Lorenzen (Bonn).

Choudhury, A. C.: Quasigroups and nonassociative systems. II. Bull. Calcutta math. Soc. 41, 211—219 (1949).

Für Teil I vgl. dies. Zbl. 31, 247 (der Name des Verf. ist dort fälschlich Choundhury geschrieben). Für Quasigruppen q werden die Mengen $\mu(u)$ der rechten Einselemente von $u \in q$ untersucht. Jedes Galoisfeld wird für jedes Paar k, l natürlicher Zahlen durch $x \circ y = x^k y^l$ zu einer Quasigruppe. Für spezielle k, l werden die Ketten $x_1, x_2, \dots (x_{n+1} \in \mu(x_n))$ durch Graphen dargestellt. — Die Abbildung von u auf \bar{u} ($=$ Vereinigung aller $\mu^n(u)$) definiert eine Topologie des Verbandes aller Untermengen von q . Lorenzen (Bonn).

Brauer, Richard: Applications of induced characters. Amer. J. Math. 69, 709—716 (1947).

Es sei \mathfrak{G} eine Gruppe endlicher Ordnung g und n das kleinste gemeinsame Vielfache der Ordnungen aller Elemente aus \mathfrak{G} . Verf. beweist zunächst Theorem 1: Jede Darstellung von \mathfrak{G} ist im Körper P_n der n -ten Einheitswurzeln möglich; in Verschärfung des vom Verf. früher [Amer. J. Math. 67, 461—471 (1945)] erhaltenen Resultates, daß der Körper P_g für jede Darstellung ausreicht. Er stützt sich beim Beweis von Theorem 1 auf den von ihm in einer vorangegangenen Arbeit (dies. Zbl. 29, 15) bewiesenen Satz über induzierte Charaktere: Jeder absolut irreduzible Charakter χ von \mathfrak{G} ist darstellbar als ganzrationalzahlige Linearkombination $\chi = \sum a_{\omega^*} \omega^*$ solcher Charaktere ω^* , die von Charakteren 1. Grades aus Untergruppen \mathfrak{H} induziert werden. Zu den ω^* gibt es sicher Darstellungen im Körper P_n , daraus wird dasselbe auch für χ gefolgert, indem gezeigt wird: Für eine zu χ gehörige Darstellung \mathfrak{z} und jede Primzahl p ist der Schursche Index von \mathfrak{z} bezüglich P_n nicht durch p teilbar. Daraufhin behandelt Verf. mit derselben Methode die Aufgabe: Welche Einheitswurzel ζ_v der Ordnung v muß zum Körper P_{χ} der Charakterwerte von χ adjungiert werden, damit es eine zu χ gehörige Darstellung im Körper $P_{\chi}(\zeta_v)$ gibt? Zum Beispiel reicht im Falle eines reellen χ entweder $v = 2^n$ oder $v =$ Primzahl $p > 2$ aus; 2^n und p sind Teiler des Grades von χ . — Eine Untergruppe \mathfrak{H} wird elementar genannt, wenn \mathfrak{H} das direkte Produkt zweier Gruppen mit teilerfremden Ordnungen ist, von denen die eine zyklisch ist und die andere Primzahlpotenzordnung besitzt. Im Satz über induzierte Charaktere genügt es anzunehmen, daß die ω^* aus elementaren Untergruppen induziert werden. Verf. zeigt, daß man alle absolut irreduziblen Darstellungen von \mathfrak{G} berechnen kann, wenn nur folgende Daten über \mathfrak{G} bekannt sind: a) Die Anzahl der Klassen konjugierter Elemente von \mathfrak{G} , sowie von allen elementaren Untergruppen \mathfrak{H} ; b) die jeweiligen Elementanzahlen dieser Klassen; c) die Einbettung der Klassen von \mathfrak{H} in die von \mathfrak{G} ; d) die Werte der Charaktere ersten Grades der Gruppen \mathfrak{H} . — p sei eine Primzahl, Verf. beweist Theorem 5: Jeder absolut unzerfällbare Charakter Φ der regulären Darstellung mod p von \mathfrak{G} ist eine ganzrationalzahlige Linearkombination $\Phi = \sum b_{\omega^*} \omega^*$ solcher ω^* , die von Charakteren ersten Grades aus elementaren Untergruppen \mathfrak{H} mit zu p teilerfremder Ordnung induziert werden. Der Beweis wird geführt analog zu dem Beweis des Satzes über induzierte gewöhnliche Charaktere: Aus den Kongruenzen $\sum c_{\mathfrak{K}} \omega^*(\mathfrak{K}) \equiv 0 \pmod{q^t}$ (summiert über alle p -regulären Klassen) modulo einer Primdivisorpotenz q^t in einem geeigneten Zahlkörper mit q -ganzen Koeffizienten $c_{\mathfrak{K}}$ für alle in Betracht kommenden ω^* muß gefolgert werden $\sum c_{\mathfrak{K}} \Phi(\mathfrak{K}) \equiv 0 \pmod{q^t}$. Für die $q \nmid p$ wird dabei auf den Beweis des Satzes über induzierte gewöhnliche Charaktere verwiesen. — Wenn man die oben angeführten Daten nur für die elementaren Untergruppen kennt, deren Ordnungen zu p prim sind, so kann man eine quadratische Form Q finden, die äquivalent zu der durch die Cartanmatrix mod p

gelieferten quadratischen Form ist. Ist p^a der p -Bestandteil von g , so ist die Anzahl der absolut irreduziblen gewöhnlichen Darstellungen mit durch p^a teilbarem Grade gleich der Anzahl der Darstellungen von 1 durch die Form Q .

Hasse, Roquette (Berlin).

Boerner, Hermann: Über die rationalen Darstellungen der allgemeinen linearen Gruppe. Arch. Math., Karlsruhe 1, 52—55 (1948).

Jede irreduzible ganzrationale Darstellung der Ordnung m der allgemeinen linearen Gruppe $GL(n)$ über einem Körper der Charakteristik Null kann man bekanntlich durch einen Teilraum des Tensorraumes m -ter Stufe erzeugen, wobei die Tensoren des Teilraumes gewisse Symmetriebedingungen erfüllen müssen. Man erhält diese Tensoren durch Anwendung der Elemente eines unzerlegbaren Linksideals im Gruppenring \mathfrak{o}_m der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_m auf den allgemeinen Tensor m -ter Stufe. Das Linksideal in \mathfrak{o}_m ist wiederum durch ein Youngsches Tableau eindeutig gekennzeichnet. Verf. gibt ein einfaches Verfahren an, das aus dem zugeordneten Youngschen Tableau eine linear unabhängige Basis des erzeugenden unzerlegbaren Tensorteilraumes zu bilden gestattet. *Specht* (Erlangen).

Baer, Reinhold: Klassifikation der Gruppenerweiterungen. J. reine angew. Math. 187, 75—94 (1949).

Als Erweiterung einer gegebenen Gruppe U wird jede Gruppe E angesehen, die U als (nicht notwendig invariante) Untergruppe enthält. Um die Gesamtheit aller Erweiterungen von U zu klassifizieren, muß zunächst definiert werden, wann zwei Erweiterungen E und F als nicht wesentlich verschieden anzusehen sind. Verf. betrachtet hierfür fünf Möglichkeiten: 1. E und F sind äquivalent, wenn es einen U elementweise festlassenden Isomorphismus von E auf F gibt. 2. E und F sind fast-äquivalent, wenn es direkte Summanden E' von E und F' von F gibt, die äquivalente Erweiterungen von U sind. 3. E und F sind verwandt, wenn sie direkte Summanden äquivalenter Erweiterungen sind. 4. E und F sind normal-ähnlich, wenn es normale U -Homomorphismen von E auf einen Teil von F und von F auf einen Teil von E gibt. (Normale Homomorphismen sind solche, die Normalteiler auf Normalteiler abbilden, U -Homomorphismen sind solche, die U elementweise festlassen.) 5. E und F sind ähnlich, wenn es U -Homomorphismen von E auf einen Teil von F und von F auf einen Teil von E gibt. — Es zeigt sich, daß von diesen Klassifikationsprinzipien jedes im strengen Sinne umfassender ist als das vorangehende. Bis auf die Fast-Äquivalenz sind alle reflexiv, symmetrisch und transitiv, diese ist zwar reflexiv und symmetrisch, aber i. a. nicht transitiv. Die Verwandtschaft ist das engste Klassifikationsprinzip, welches reflexiv, symmetrisch und transitiv ist und bei welchem fast-äquivalente Erweiterungen zur gleichen Klasse gehören. — Es sei $\Phi(U)$ die Gesamtheit der Klassen ähnlicher Erweiterungen von U . In $\Phi(U)$ wird eine teilweise Ordnung eingeführt durch die Festsetzung: Für zwei Klassen $[U \subset E]$ und $[U \subset F]$ gelte $[U \subset E] \leq [U \subset F]$ dann und nur dann, wenn es einen U -Homomorphismus von E auf einen Teil von F gibt. Diese Ordnungsbeziehung ist transitiv und von der Auswahl der Repräsentanten in den Klassen unabhängig. — Jede Menge von Klassen ähnlicher Erweiterungen besitzt in $\Phi(U)$ eine kleinste gemeinsame obere Grenze und eine größte gemeinsame untere Grenze. Für die Gesamtheit $\Phi(U)$ selbst braucht dies nicht zu gelten. $\Phi(U)$ ist i. a. in einer Bezeichnung von Menger eine Unmenge. Durch Beispiele wird gezeigt, daß es in $\Phi(U)$ Teilsysteme geben kann, die den Ordnungstypus der Gesamtheit aller Ordinalzahlen haben. — Eine Untergruppe R von G heißt Retrakte von G , wenn es einen R -Homomorphismus von G auf R gibt. Es wird bewiesen: Die folgenden Eigenschaften der Erweiterungen E und F von U sind miteinander äquivalent: (a) $[U \subset E] \leq [U \subset F]$. (b) Es existiert eine Erweiterung von E , die sich U -homomorph auf F abbilden läßt. (c) Es existiert eine Erweiterung von E , die E zur Retrakte hat und sich U -homomorph auf F abbilden läßt. (d) Es existiert eine

Erweiterung von E , die F zur Retrakte hat. — Dann und nur dann sind E und F ähnliche Erweiterungen, wenn E und F Retrakten einer gemeinsamen Erweiterung sind. — Schließlich werden noch die Fälle genauer betrachtet, daß U Normalteiler ist oder daß es sich um abelsche Erweiterungen einer abelschen Gruppe U handelt. Im letzteren Fall gilt in der Gesamtheit aller derartigen Erweiterungen der Dedekindsche Modulsatz.

R. Kochendörffer (Greifswald).

Tartakovskij, V. A.: Anwendung der Siebmethode zur Lösung des Identitätsproblems in einigen Typen von Gruppen. Mat. Sbornik, n. S. 25 (67), 251—274 (1949) [Russisch].

Mittels der vom Verf. in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 34, 163) eingeführten Begriffe wird das Identitätsproblem (d. h. die Aufgabe, zu entscheiden, ob ein gegebenes Wort gleich dem Einselement ist) für Gruppen gelöst, die endlich viele erzeugende Elemente besitzen und in denen die erzeugenden Relationen so geschrieben werden können, daß — kurz gesagt — die dabei auftretenden Wörter in verhältnismäßig langen Abschnitten übereinstimmen. Dies geschieht durch genaue Untersuchung solcher Wörter, in denen die Exponenten lineare Funktionen einer festen Anzahl von Variablen sind. Aus endlich vielen derartigen Wörtern, die sich durch einen endlichen Prozeß auffinden lassen, kann jedes einfache Wort, welches gleich dem Einselement ist, abgeleitet werden.

R. Kochendörffer (Greifswald).

• Müller, Heinz: Scharfe Fassung des Begriffes *faisceau* in einer gruppentheoretischen Arbeit Camille Jordan's. Zürich: Dissertationsdruckerei AG. Gebr. Lee-mann & Co., 1947. 31 S. (Diss.).

Es handelt sich um den Satz von Camille Jordan: Eine endliche Gruppe \mathcal{G} von linearen Substitutionen vom Grade n besitzt einen abelschen Normalteiler \mathfrak{N} , dessen Index unterhalb einer nur von n abhängigen Schranke A liegt; \mathfrak{N} ist durch eine gewisse Maximaleigenschaft charakterisiert. Verf. macht es sich zur Aufgabe, Jordans ursprünglichen Beweis [J. reine angew. Math. 84, 89—215 (1877)] mit einer modernen Anforderungen genügenden Präzision darzustellen. Dazu verschärft er den Begriff des *faisceau* von Jordan in der folgenden Weise: Die abelsche Untergruppe \mathfrak{H} von \mathcal{G} heißt r -Büschel, wenn sie die Gruppe \mathfrak{M} der Skalarmatrizen umfaßt, und jede Untergruppe \mathfrak{K} von \mathfrak{H} , deren Zentralisator in der vollen Matrizen-Gruppe größeren Rang hat als der Zentralisator von \mathfrak{H} , in \mathfrak{H} von größerem Index als r ist. \mathfrak{M} selbst heißt r -Büschel für jedes r . Die Maximaleigenschaft von \mathfrak{N} lautet dann: \mathfrak{N} ist Q -Büschel von \mathcal{G} , und enthält alle Q -Büschel von \mathcal{G} , wobei Q eine gewisse ebenfalls nur vom Grade n abhängige Schranke bedeutet. — Verf. begnügt sich nicht damit, den Beweis durchzuführen, sondern er weist auch überall auf die Motivierung dieser Beweismethode hin. Die Schranke, die man für den Index auf diesem Wege erhält, ist unbrauchbar groß, und Verf. weist auf die verschiedenen, in der Literatur enthaltenen, Beweise (Bieberbach, Frobenius, Blichfeldt) hin, die mit anderen Hilfsmitteln arbeiten und bessere Schranken für den Index angeben.

B. H. Neumann (Manchester).

Rado, R.: A theorem on abelian groups. J. London math. Soc. 22, 219—226 (1947).

Es sei G eine additive abelsche Gruppe mit einem kommutativen Operator- Ω mit Einheit:

$$(1) \quad \alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y; (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x; \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

$$(2) \quad \alpha x = 0 \text{ verlangt } \alpha = 0 \text{ oder } x = 0,$$

wenn α, β zu Ω , x, y zu G gehören. In Ω sei eine Teilmenge Ω^+ ausgezeichnet mit folgenden Eigenschaften: Sind $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ (nicht alle Null) aus Ω , so gibt es für $1 \leq \mu \leq m$; $1 \leq \nu \leq m$; $\mu \neq \nu$ stets Größen β_μ, γ_μ in Ω , die

$$\alpha_\mu = \gamma_\mu(\alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_m\beta_m); \gamma_\mu(\beta_\mu - \beta_\nu) \in \Omega^+$$

erfüllen. — Beispiele hierfür: (1) Ω Hauptidealring, $\Omega = \Omega^+$. (2) Ω Ring aller reellen Zahlen, Ω^+ Menge aller nichtnegativen Zahlen. (3) Ω Ring aller komplexen Zahlen, Ω^+ Menge aller komplexen Zahlen mit nichtnegativen Realteil. — Eine Teilmenge A von G heißt m - Ω -konvex, wenn für eine natürliche Zahl m die Bedingungen

$$\alpha_\mu \in \Omega^+; x_\mu \in A; \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = 1 \quad (\mu = 1, 2, \dots, m)$$

stets die Beziehung $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m \in A$ zur Folge haben. A heißt Ω -konvex schlechthin, wenn A m - Ω -konvex für jedes natürliche m ist. — Unter diesen Festsetzungen gilt der Satz: A_1, A_2, \dots, A_n seien Ω -konvexe Teilmengen von G , $\text{Rang}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \leq n-2$, $A_{\nu_1} \cap A_{\nu_2} \cap \dots \cap A_{\nu_k} \neq 0$ für jede Wahl von Indizes $1 \leq \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_k \leq n$ und schließlich $\text{Rang}(A_{\nu_1} \cup A_{\nu_2} \cup \dots \cup A_{\nu_k}) = k-1$. Dann ist $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \neq 0$. Anwendung dieses Satzes auf die Gruppe G aller Vektoren im k -dimensionalen euklidischen Raume mit dem Operatorenring Ω der reellen Zahlen, der Teilmenge Ω^+ der nichtnegativen Zahlen liefert den bekannten Satz von Helly über den Durchschnitt von $n \geq k+2$ konvexen Bereichen im k -dimensionalen Raum, von denen je $k+1$ Bereiche wenigstens einen Punkt gemein haben. Anwendung auf die Menge der ganzrationalen Zahlen liefert einen Satz von Stieltjes über arithmetische Progressionen ganzer Zahlen, der hier auf Gitterpunkte im k -dimensionalen Raum verallgemeinert wird: Im k -dimensionalen euklidischen Raume R_k sei ein kartesisches Koordinatensystem festgelegt, L_1, L_2, \dots, L_n seien Gitter im R_k :

$$L_\nu: \xi_{\nu 0} + \alpha_1 \xi_{\nu 1} + \alpha_2 \xi_{\nu 2} + \dots + \alpha_{m_\nu} \xi_{\nu m_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

mit festen Punkten ξ und beliebigen ganzrationalen α ; dabei sei $k \leq n-2$. Haben dann je $k+1$ der Gitter wenigstens einen Punkt gemeinsam, so haben alle n Gitter L_ν wenigstens einen Punkt gemeinsam. — In Vektorräumen über Körpern zieht bekanntlich 2- Ω -Konvexität und $(m-1)$ - Ω -Konvexität die m - Ω -Konvexität nach sich. Allgemein ist dies jedoch nicht der Fall, da Beispiele von 2- Ω -konvexen Mengen angegeben werden können, die nicht mehr 3- Ω -konvex sind. *Specht.*

Braconnier, Jean: Sur les groupes topologiques localement compacts. J. Math. pur. app., Paris IX. S. 27, 1—85 (1948).

Ce mémoire donne les démonstrations de résultats pour la plupart annoncés dans 3 Notes aux C. r. Acad. Sci., Paris [218, 304—305, 577—579 (1944); 220, 882—884 (1945)]. On sait qu'un groupe topologique abélien localement compact est un produit direct $R^n \times G$, où G possède un sous-groupe ouvert compact. L'A. étudie principalement les groupes de ce dernier type, en particulier les groupes discrets ou totalement discontinus ainsi que leur dual. Dans la suite, G désigne un groupe abélien localement compact, \hat{G} son dual. — Le Chap. I introduit la notion de produit local de groupes G_α relatifs à des sous-groupes invariants ouverts $H_\alpha \subset G_\alpha$; c'est le produit $\prod G_\alpha$ où l'on prend comme voisinages de l'élément neutre e les ouverts contenant e du produit topologique $\prod H_\alpha$. Le produit direct local des groupes G_α est l'adhérence (dans le produit local) du produit direct des sous-groupes G_α . — Chap. II: G est primaire (associé à p), si pour tout $x \in G$ la représentation $n \rightarrow nx$ de \mathbb{Z} dans G se prolonge en une représentation continue de \mathbb{Z}_p (groupe topologique compact des entiers p -adiques). Les p -groupes en sont des cas particuliers. Si G est primaire, \hat{G} l'est aussi (associé au même entier) et il est totalement discontinu. L'A. étudie ensuite les p -groupes abéliens, 1) discrets (retrouvant entre autres quelques théorèmes de R. Baer), 2) compacts: ils sont produits directs de groupes cycliques d'ordres bornés et 3) localement compacts: ils sont isomorphes à des sous-groupes ouverts de produits directs locaux de groupes Q_p/\mathbb{Z}_p relativement à des sous-groupes d'ordres bornés (Q_p corps localement compact des nombres p -adiques). Le Chap. III est consacré aux groupes totalement discontinus. La composante primaire G_p de G

(associée à p) est l'ensemble des éléments $x \in G$ pour lesquels l'application $n \rightarrow nx$ se prolonge en une représentation continue de Z_p dans G . C'est un sous-groupe, fermé si G est totalement discontinu. Soient G et \hat{G} totalement discontinus, H un sous-groupe ouvert compact de G ; alors G est produit direct local de ses composantes primaires, relativement aux sous-groupes $H \cap G_p$ ($p = 2, 3, 5, \dots$). Si tous les éléments de G sont d'ordre fini, G et \hat{G} sont totalement discontinus et G est produit d'un nombre fini de p_i -groupes et d'un groupe discret, somme directe de p -groupes discrets. Enfin si G a un sous-groupe ouvert compact, il est isomorphe à un sous-groupe fermé d'un produit direct $T^s \times G_1 \times G_2$ (G_1 et \hat{G}_1 totalement discontinus, G_2 a tous ses éléments $\neq 0$ d'ordre infini). Le Chap. IV étudie les automorphismes de G . Il est notamment montré que G et \hat{G} ont des groupes d'automorphismes isomorphes. L'A. définit, à l'aide de la mesure de Haar, le module d'un automorphisme, notion qui généralise celle de déterminant d'une transformation linéaire et il en donne quelques propriétés.

A. Borel (Paris).

Verbände. Ringe:

• Hostinsky, Lois Aileen: Endomorphisms and direct decompositions in lattices. Abstract of a Thesis, Urbana, Illinois 1949.

Zugrunde gelegt wird ein vollständiger modularer Verband P mit Nullelement 0, dessen Verknüpfungen als Addition und Multiplikation geschrieben werden und in dem für jede aufsteigende Kette $\{p_v\}$ das Distributivgesetz $a \sum_v p_v = \sum_v a p_v$ gilt.

Beispiel: Der Verband der normalen zulässigen Unterquasigruppen einer Quasigruppe mit neutralem Element und Operatoren. Homomorphismus η von $p \in P$ auf $q \in P$: Jedem $x \leq p$ wird ein $x\eta \leq q$ so zugeordnet, daß 1. $p\eta = q$, 2. zu jedem $y \leq x\eta$ ein $z \leq x$ mit $z\eta = y$ existiert, 3. $(\sum_v a_v)\eta = \sum_v a_v\eta$, 4. aus

$x\eta = y\eta$ die Existenz von x', y' mit $x'\eta = y'\eta = 0$ und $x + x' = y + y'$ folgt. Endomorphismus von p : Homomorphismus von p auf $q \leq p$. Für einen Endomorphismus η von p werden die folgenden Begriffe eingeführt. η -zulässiges x : $x\eta \leq x \leq p$. η -automorphes x : x ist η -zulässig und für jedes η -zulässige $y \leq x$ gilt $y\eta = y$. Radikal $r(\eta)$: Die Summe der $x \leq p$ mit $x\eta^i = 0$ für eine natürliche Zahl i . Zerfallend: Es gibt ein c mit $p = r(\eta) + c$, $cr(\eta) = 0$, $c\eta = c$. Gleichmäßig zerfallend: η ruft in jedem η -zulässigen $x \leq p$ einen zerfallenden Endomorphismus hervor. Es gilt der Satz: Erfüllen die $x \leq p$ die O -Kettenbedingung, so ist der Endomorphismus η genau dann gleichmäßig zerfallend, wenn es zu jedem η -zulässigen $x \leq p$ eine natürliche Zahl n mit η -automorphem $x\eta^n$ gibt.

— Im Falle $p = a + b$, $ab = 0$ spricht man von einer direkten Zerlegung $p = a \oplus b$. Die dabei durch $xa = (b + x)a$, $x\beta = (a + x)b$ bestimmten Endomorphismen α, β werden als komplementäre Zerlegungsendomorphismen bezeichnet. Über p wird nun Folgendes vorausgesetzt: Ist α ein Zerlegungsendomorphismus und δ, ε komplementäre Zerlegungsendomorphismen von p , so ist $\alpha\delta\alpha\varepsilon\alpha$ ein gleichmäßig zerfallender Endomorphismus von p . Dann ergibt sich der „Spezielle Verfeinerungssatz“: Zu $p = a \oplus b = d \oplus e$ gibt es direkte Zerlegungen $a = a' \oplus a''$, $b = b' \oplus b''$, $d = d' \oplus d''$, $e = e' \oplus e''$ mit $a' \oplus b' = b' \oplus d' = d' \oplus e' = e' \oplus a'$, $a'' \oplus d'' = d'' \oplus e'' = e'' \oplus b'' = b'' \oplus a''$. Weiter erhält man für direkte Zerlegungen von p mit beliebiger Summandenanzahl den „Allgemeinen Verfeinerungssatz“: Zu zwei solchen Zerlegungen gibt es stets Verfeinerungen $p = a_1 \oplus \dots \oplus a_n = b_1 \oplus \dots \oplus b_n$ mit $p = a_1 \oplus \dots \oplus a_{i-1} \oplus b_i \oplus a_{i+1} \oplus \dots \oplus a_n$ für $i = 1, \dots, n$.

Pickert.

Riguet, Jacques: Produit tensoriel d'ensembles ordonnés. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 1007—1008 (1948).

Die Definition des „tensoriellen“ Produktes von Verbänden (J. Riguet, dies. Zbl. 31, 107) wird auf halbgeordnete Mengen verallgemeinert. Lorenzen (Bonn).

Schützenberger, Marcel-Paul: Sur certaines applications remarquables des treillis dans eux-mêmes. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 1008—1010 (1948).

Eine „aufsteigende“ Abbildung s eines Verbandes L wird definiert durch 1. $x \leq s(x)$, 2. $x \leq y \rightarrow s(x) \leq s(y)$, 3. $s(x) \wedge s(y) = s(x \wedge y)$. Ist L vollständig, so definiert $t(x) = \bigwedge_{x \leq s(u)} u$ eine „absteigende“ Abbildung mit zu 1.—3. dualen Bedin-

gungen und $ts(x) \leq x \leq st(x)$. Durch $s \prec s' \leftrightarrow \forall x: s(x) < s'(x)$ bilden die aufsteigenden Abbildungen einen Verband $\tau(L)$. Ohne Beweis wird u. a. mitgeteilt, daß $\tau(L)$ isomorph zu L ist, wenn L komplementär ist. Lorenzen (Bonn).

Kiss, S. A.: Semilattices and a ternary operation in modular lattices. Bull. Amer. math. Soc. **54**, 1176—1179 (1948).

Eine 3-stellige Operation, die bisher nur für distributive Verbände durch $[x, t, y] = (x \wedge t) \vee (t \wedge y) \vee (y \wedge x)$ definiert war, wird durch

$$[x, t, y] = (x \wedge (t \vee y)) \vee (t \wedge y)$$

auf modulare Verbände verallgemeinert. Für festes t ist die 2-stellige Operation $x^t y = [x, t, y]$ idempotent und assoziativ, braucht jedoch nicht kommutativ zu sein. Lorenzen (Bonn).

Nachbin, Leopoldo: Une propriété caractéristique des algèbres booléennes. Portugaliae Math. **6**, 115—111 (1947).

Soit R un ensemble réticulé (lattice) distributif, où on note $a \cup b$ et $a \cap b$ les opérations de borne supérieure et borne inférieure de deux éléments a, b ; on suppose en outre que R a un plus petit élément 0 et un plus grand élément 1. L'A. dit qu'une partie F de R est un filtre si elle satisfait aux conditions suivantes: 1. $0 \notin F$ et $1 \in F$; 2. si $y \in F$ et $y \leq x$, alors $x \in F$; 3. si $x \in F$ et $y \in F$, alors $x \cap y \in F$. On dit qu'un filtre F est premier si la relation $x \cup y \in F$ entraîne $x \in F$ ou $y \in F$. Tout filtre maximal est premier. L'A. montre que, pour que tout filtre premier soit maximal, il faut et il suffit que R soit une algèbre booléenne.

J. Dieudonné (Nancy).

● **Kaplansky, Irving:** Topological rings. Amer. J. Math. **69**, 153—183 (1947).

L'A. étudie les anneaux topologiques en utilisant les notions d'éléments quasi-réguliers à droite (resp. à droite et à gauche) [en abrégé q. r. d. (resp. q. r.)] et de radical [cf. N. Jacobson, Amer. J. Math. **67**, 300—320 (1945)]; si A est un anneau, on désigne par R son radical; si $A = R$ (resp. $R = \{0\}$, A/R est simple, un corps), on dit que A est radical (resp. semi-simple, primaire, complètement primaire). Si A est un anneau topologique, on dit que A est un Q_r -anneau (resp. un Q -anneau) si l'ensemble des éléments q. r. d. (resp. q. r.) est ouvert. Si A est un Q_r -anneau, R est fermé (et ouvert si A est borné); si A a une unité, les idéaux (à droite) maximaux sont fermés; s'il n'y a pas d'idéaux non triviaux, A est radical ou un corps. On peut alors étudier les anneaux compacts: si A est compact, R est fermé et, si V est un voisinage de 0, $R^n \subset V$ si n est assez grand (p. 162, ligne 5 du bas, lire A au lieu de R); de plus, si A est semi-simple, A est produit d'anneaux simples finis; si A est primaire, A est un anneau de matrices sur un anneau complètement primaire; si A est commutatif, A est produit d'un anneau radical et d'anneaux primaires et si R^2 est ouvert, A est un anneau local; si A n'a pas de diviseurs de 0, A est radical ou complètement primaire. Si A est un anneau localement compact, et sans diviseurs de 0, A est connexe ou totalement discontinu [cf. J. Braconnier, C. r. Acad. Sci., Paris **222**, 527—529 (1946)] et A est un Q -anneau à quasi-inverse continu [ce résultat, démontré ici avec des hypothèses de dénombrabilité restrictives, a été étendu par l'auteur, Amer. J. Math. **70**, 447—459 (1948)]. Dans la suite, l'A. étudie l'anneau des fonctions continues $\mathcal{C}(E, A)$ (E espace topologique, A anneau topologique) (cf. N. Bourbaki, *Eléments de Mathématique*, Livre III, Chap. X, Paris, 1949); un

idéal $I \subset \mathcal{O}(E, A)$ est dit libre si, pour tout $x \in E$, il existe $f \in I$ telle que $f(x) = 1$, fixe dans le cas contraire. Si E est compact et totalement discontinu (en abrégé t. d.) et si A est un Q -anneau à quasi-inverse continu et ayant une unité, tout idéal non trivial est fixe; les idéaux maximaux sont formés des f qui appliquent les $x \in E$ dans les idéaux maximaux de A . Si E est t. d., et si I est un idéal fermé de $\mathcal{O}_c(E, A)$, alors à tout $x \in E$ correspond un idéal fermé $J(x) \subset A$ tel que I soit formé des f telles que $f(x) \in J(x)$ pour tout x . Si E est localement compact et t. d., et si A est un Q -anneau ayant une unité, pour qu'un idéal maximal I de $\mathcal{O}(E, A)$

soit libre, il faut et il suffit que $I \supset F$ (F idéal libre formé des f telles que $C f(R)$ soit relativement compact); si E ou A est discret, F est l'intersection des idéaux maximaux libres de $\mathcal{O}(E, A)$. Si E est t. d., et si A n'a pas de diviseurs de 0, a un inverse continu (là où il est défini) et un voisinage d'un de ses points a formé de multiples de a , alors l'adhérence d'un idéal premier de $\mathcal{O}_c(E, A)$ est un idéal premier et les idéaux premiers fermés de $\mathcal{O}_c(E, A)$ sont maximaux s'il en est de même dans A . Si E est compact et t. d. et si A est un Q -anneau, les idéaux primitifs de $\mathcal{O}(E, A)$ sont formés des f qui appliquent un $x \in E$ fixe dans un idéal primitif de A . Si E est t. d., si A possède des idéaux ouverts aussi petits qu'on veut, si H est un sous-anneau de $\mathcal{O}_c(E, A)$ contenant les fonctions constantes et séparant E , H est partout dense. L'A. termine en étudiant les idéaux de fonctions qui s'annulent en un point de E , dans divers cas, et le sous-anneau de $\mathcal{O}_u(E, A)$ formé des fonctions bornées (A Q -anneau localement borné). Ce mémoire contient de nombreux exemples; il a été complété sur certains points par l'auteur dans Amer. J. Math., op. cit.

J. Braconnier (Lyon).

Krull, Wolfgang: Parameterspezialisierung in Polynomringen. Arch. Math., Karlsruhe 1, 56—64 (1948).

Bewiesen wird u. a. folgender Satz: Ist $\mathfrak{K} = K(u)$ eine rein transzendente Erweiterung des unendlich viele Elemente enthaltenden Körpers K und $\mathfrak{P} = \mathfrak{K}[x_1, \dots, x_n]$, $\Pi = K[x_1, \dots, x_n]$, so bleiben alle zwischen endlich vielen festen Idealen aus \mathfrak{P} gültigen Summen-, Durchschnitts-, Produkt- und Quotientengleichungen „fast immer“, d. h. nach Ausschluß endlich vieler Elemente $\alpha \in K$, erhalten, wenn man durch Spezialisierungen $u \rightarrow \alpha$ den Polynombereich \mathfrak{P} auf Π abbildet. Die erwähnten Ausnahmen sind durch die Nennernullstellen in K der bei Elementen $a(x) \in \mathfrak{P}$ auftretenden Koeffizienten aus $\mathfrak{K} = K(u)$ bedingt. Der Beweis stützt sich auf die Arbeit von Grete Hermann: Die Frage der endlich vielen Schritte in der Theorie der Polynomringe; Math. Ann., Berlin 95, 736—788 (1926), die lehrt, daß die hierbei wesentlichen Idealoperationen mittels bestimmter kanonischer Algorithmen rational in endlich vielen Schritten durchführbar sind. Wird allgemein für ein Ideal \mathfrak{a} aus \mathfrak{P} das für erlaubte Spezialisierungen $u \rightarrow \alpha$ in Π entstehende Bildideal mit $\bar{\mathfrak{a}}$ bezeichnet, so gelten folgende Einzelsätze: 1. Es ist stets $\bar{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}} \subseteq \bar{\mathfrak{a}} + \bar{\mathfrak{b}}$, $\bar{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}} \subseteq \bar{\mathfrak{a}} \cdot \bar{\mathfrak{b}}$, $\bar{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} \supseteq \bar{\mathfrak{a}} \cap \bar{\mathfrak{b}}$, $\bar{\mathfrak{a} : \mathfrak{b}} \supseteq \bar{\mathfrak{a}} : \bar{\mathfrak{b}}$ und fast immer $\bar{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}} = \bar{\mathfrak{a}} + \bar{\mathfrak{b}}$, $\bar{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}} = \bar{\mathfrak{a}} \cdot \bar{\mathfrak{b}}$, $\bar{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} = \bar{\mathfrak{a}} \cap \bar{\mathfrak{b}}$, $\bar{\mathfrak{a} : \mathfrak{b}} = \bar{\mathfrak{a}} : \bar{\mathfrak{b}}$. Nimmt man, was o. B. d. A. geschehen darf, an, daß \mathfrak{K} n^2 Unbestimmte u_{ik} enthält, und definiert man als „allgemeine“ Unbestimmte $z_i = \sum u_{ik} x_k$ sowie $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{K}[z_1, \dots, z_i]$, $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{K}$, $\mathfrak{P}_n = \mathfrak{P}$, so versteht man unter dem i -ten Grundideal g_i eines Ideals $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{P}$ die Menge aller als Quotienten $a(x)/a_i(x)$ mit $a(x) \in \mathfrak{P}$, $a_i(x) \in \mathfrak{P}_i$ darstellbaren Elemente von \mathfrak{a} ; $\bar{f}_i = g_i : g_{i+1}$ heißt der i -te Grundquotient ($i = 0, 1, \dots, n-1$; $g_0 = \mathfrak{a}$, $g_n = \mathfrak{P}$). Dann gilt: 2. Ist g_i bzw. \bar{f}_i das i -te Grundideal bzw. der i -te Grundquotient von \mathfrak{a} , so ist fast immer \bar{g}_i bzw. \bar{f}_i das i -te Grundideal bzw. der i -te Grundquotient von $\bar{\mathfrak{a}}$. Mittels der von E. Noether: Eliminationstheorie und allgemeine Idealtheorie, Math. Ann., Berlin 90, 229—261 (1923) vorgenommenen Kennzeichnung gewisser Eigenschaften eines Ideals \mathfrak{a} durch die allgemeinen Unbe-

stimmten z_i und die Grundideale ergibt sich dann: 3. Ist α ungemischt r -dimensional, so auch fast immer $\bar{\alpha}$. 4. Die Dimension von α ist fast immer gleich der von $\bar{\alpha}$ und niemals größer; sowie die von zunächst möglichen naiven Vermutungen abweichende und, wie Gegenbeispiele zeigen, nicht verschärfbare Aussage: 5. Sind η_1 und η_2 zwei verschiedene Primideale aus \mathfrak{P} , so besitzen $\bar{\eta}_1$ und $\bar{\eta}_2$ fast immer kein gemeinsames zugehöriges Primideal. Nennt man schließlich eine unverkürzbare Durchschnittsdarstellung $\alpha = q_1 \cap \dots \cap q_m$ durch größte Primärkomponenten q_i kurz eine Normalzerlegung, so gilt: 6. Ist $\alpha = q_1 \cap \dots \cap q_m$ eine Normalzerlegung von α in \mathfrak{P} , $\bar{q}_k = \bar{q}_{k1} \cap \dots \cap \bar{q}_{kr_k}$ eine von \bar{q}_k in Π ($k = 1, \dots, m$), so ist fast immer $\bar{\alpha} = q_{11} \cap \dots \cap q_{mr_m}$ eine von $\bar{\alpha}$ in Π . Damit ist gezeigt, daß man sich bei der Untersuchung des Verhaltens von Idealen α gegenüber Parameterspezialisierungen $u \rightarrow \alpha$ fast immer auf Primär- und Primideale beschränken darf; die hierhergehörigen Fragen werden in der im folgenden Referat behandelten Arbeit desselben Verf. geklärt. Grell (Berlin).

Krull, Wolfgang: Parameterspezialisierung in Polynomringen. II. Das Grundpolynom. Arch. Math., Karlsruhe 1, 129—137 (1948).

Ähnlich wie im vorsteh. Referat sei bei zunächst beliebigem Körper \mathbb{K} wieder $\mathfrak{P} = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$; $\mathbb{K}_0 = \mathbb{K}(u_1, \dots, u_n)$ sei der aus \mathbb{K} durch Adjunktion von n^2 Unbestimmten entstandene Körper und $\mathfrak{P}_i = \mathbb{K}_0[z_1, \dots, z_i]$; z_i soll dieselbe Bedeutung wie vorhin haben. Zunächst werden ungemischte Ideale α der Dimension r betrachtet und u. a. folgende Aussagen bewiesen: 1. α enthält ein eindeutig bestimmtes ausgezeichnetes Polynom $G(\alpha)$, sein Grundpolynom; es ist dadurch charakterisiert, daß es in \mathfrak{P}_{r+1} liegt, nicht Vielfaches eines Polynoms positiven Grades aus \mathfrak{P}_r und sein Grad in z_{r+1} minimal ist; alle Polynome aus $\alpha \cap \mathfrak{P}_{r+1}$ sind Vielfache von $G(\alpha)$. Grundpolynome von Primidealen sind irreduzibel, solche von Primärideal Potenzen desjenigen des zugehörigen Primideals, das Grundpolynom eines beliebigen ungemischten r -dimensionalen Ideals ist gleich dem Produkt derjenigen seiner r -dimensionalen Primärkomponenten; verschiedene Primideale haben verschiedene Grundpolynome. — Für beliebige, nicht notwendig ungemischte, r -dimensionale Ideale läßt sich auf Umwegen ebenfalls das Grund- und außerdem leicht das Minimalpolynom $M(\alpha)$ definieren; bei ungemischtem α wird $M(\alpha) = G(\alpha)$. Das Minimalpolynom hat einfachere formale Eigenschaften, besitzt dafür aber nicht mehr den soeben beschriebenen, auch im Fall eines gemischten Ideals bestehenden Zusammenhang des Grundpolynoms von α mit den zu α gehörigen Primidealen. Die diesbezüglichen Verhältnisse werden weitgehend untersucht und geklärt, vor allem im Hinblick auf den Übergang von $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ nach $\mathbb{L}[x_1, \dots, x_n]$, wo \mathbb{L} algebraische Erweiterung von \mathbb{K} ist. — 2. Ist G zu $\partial G / \partial z_{r+1}$ faktorfremd, ist also G frei von mehrfachen Primfaktoren und sind diese alle separabel, so hat α als Primärkomponenten lauter Primideale; bei irreduziblem G ist α selbst Primideal. — Es ergibt sich weiter, daß die Separabilität bzw. absolute Irreduzibilität des zu einem Primideal \mathfrak{p} gehörigen Grundpolynoms $G(\mathfrak{p})$ charakteristisch dafür ist, daß bei beliebiger algebraischer Erweiterung \mathbb{L} von \mathbb{K} das Ideal $\mathfrak{p}\mathbb{L}$ in $\mathfrak{P}\mathbb{L}$ Durchschnitt endlich vieler Primideale ist bzw. Primideal bleibt. Das Minimalpolynom von α ist stets gleich dem von $\alpha\mathbb{L}$ in $\mathfrak{P}\mathbb{L}$, wenn α beliebiges (evtl. gemischtes) r -dimensionales Ideal aus \mathfrak{P} ist. — Ein Primideal heiße separabel bzw. absolut irreduzibel, wenn sein Grundpolynom es ist. Spezialisiert man nun \mathbb{K} zu einer einfach transzendenten Erweiterung eines unendlich viele Elemente umfassenden Körpers K , $\mathbb{K} = K(u)$, und nimmt wie in der vorangehend referierten Arbeit Spezialisierungen $u \rightarrow \alpha$ vor, so gilt für beliebige Ideale α : 3. Ist $M(\alpha)$ das Minimalpolynom von α , so fast immer $M(\alpha)$ dasjenige von α ; ist $G(\alpha)$ das Grundpolynom des ungemischten Ideals α , so fast immer $G(\alpha)$ dasjenige des ungemischten α . 4. Bei separablem \mathfrak{p} wird fast immer \mathfrak{p} Durchschnitt von endlich vielen Primidealen; bei

inseparablen \mathfrak{p} wird im Falle eines vollkommenen K fast immer $\bar{\mathfrak{p}}$ Durchschnitt endlich vieler echter Primärideale; mit \mathfrak{p} ist fast immer auch $\bar{\mathfrak{p}}$ absolut irreduzibel; ist \mathfrak{p} separabel, aber nicht absolut irreduzibel, so wird bei algebraisch-abgeschlossenem K fast immer $\bar{\mathfrak{p}}$ Durchschnitt von wenigstens zwei Primidealen. 5. Für ein echtes, zu einem separablen Primideal \mathfrak{p} gehöriges Primärideal \mathfrak{q} wird fast immer $\bar{\mathfrak{q}}$ Durchschnitt endlich vieler echter Primärideale. — Da bei inseparablen \mathfrak{p} u. U. \mathfrak{p} und ein echtes zugehöriges Primärideal \mathfrak{q} dasselbe Grundpolynom $G(z)$ besitzen, läßt sich nur soviel aussagen, daß für ein solches Primärideal fast immer das spezialisierte \mathfrak{q} Durchschnitt endlich vieler gleichdimensionaler Primärideale werden muß, die nicht sämtlich Primideale sein können.

Grell (Berlin).

Jaffard, Paul: Détermination de certains anneaux. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 805—806 (1949).

On appelle socle (droit) d'un anneau A la somme de tous les idéaux minimaux (à droite) de A . L' A . détermine tous les anneaux A dont le socle (droit) \mathfrak{S} n'est pas nul et a un annihilateur (à droite) réduit à 0. Il montre qu'un tel anneau peut être caractérisé par la propriété suivante: A est contenu dans le produit d'une famille d'anneaux primitifs (au sens de N. Jacobson) de socle droit non nul, et contient le socle de ce produit.

J. Dieudonné (Nancy).

Jacobson, F. D. and N. Jacobsen: Classification and representation of semi-simple Jordan algebras. Trans. Amer. math. Soc. **65**, 141—169 (1949).

Über Jordan-Algebren \mathfrak{J} , gekennzeichnet durch die Gesetze $a \circ b = b \circ a$, $(a \circ b) \circ a^2 = a \circ (b \circ a^2)$, hat 1947 A. A. Albert (dies. Zbl. **29**, 10, 11) bewiesen, daß bei Charakteristik 0 des Grundkörpers k jede halbeinfache Algebra (d. h. ohne auflösbare Ideale) immer direkte Summe von einfachen (idealfreien) Algebren ist, daß also dieselbe Theorie gilt wie bei assoziativen und Lieschen Ringen. Die Frage nach allen halbeinfachen Jordan-Algebren ist damit auf die Aufgabe reduziert, alle möglichen einfachen Jordan-Algebren zu bestimmen. Beiträge von Albert, Kalisch, Schafer in dieser Richtung ließen immer noch eine gewisse Lücke offen, die nunmehr durch die vorliegende Arbeit geschlossen wurde. Zur Beschreibung dieser Jordan-Algebren wird in gewissen einfachen assoziativen Algebren (bzw. mit Antiautomorphismen) $2a \circ b = ab + ba$ definiert. Die Untersuchungen der bisherigen Autoren werden zum Teil in größerer Allgemeinheit (Char. $\neq 2$) neu dargestellt. — Für alle halbeinfachen \mathfrak{J} bestimmen die Verff. die von Birkhoff und Whitman (dies. Zbl. **32**, 251) eingeführte und in gewissen Fällen diskutierte universelle (assoziative Darstellungs-)Hülle $\mathfrak{U}(\mathfrak{J})$. Es stellt sich heraus, daß bei Char. 0 stets $\mathfrak{U}(\mathfrak{J})$ eine halbeinfache assoziative Algebra ist, die genau angegeben wird. Als Corollar folgt der Satz, daß jede Matrizendarstellung $(2a \circ b \rightarrow AB + BA)$ einer halbeinfachen Jordanschen Algebra bei Char. 0 stets vollreduzibel ist, und daß die irreduziblen Darstellungen durch Zurückgehen auf die assoziative Theorie im Prinzip explizit bestimmt werden können.

Ernst Witt (Hamburg).

Jacobson, Nathan: Lie and Jordan triple systems. Amer. J. Math. **71**, 149—170 (1949).

1. In einer assoziativen Algebra \mathfrak{A} werde $[a, b] = ab - ba$ und $\{a, b\} = ab + ba$ gesetzt. \mathfrak{L}_2 bzw. \mathfrak{L}_3 , \mathfrak{J}_2 , \mathfrak{J}_3 seien Teilmoduln von \mathfrak{A} , die hinsichtlich der Operationen $[a, b]$ bzw. $[[a, b], c]$, $\{a, b\}$, $\{\{a, b\}, c\}$ abgeschlossen sind, sie heißen spezieller Liescher Ring bzw. Liesches Tripelsystem, spezieller Jordanscher Ring, Jordansches Tripelsystem. Sätze: \mathfrak{J}_3 kann auch durch Abgeschlossenheit hinsichtlich $abc + cba$ oder hinsichtlich a^3 gekennzeichnet werden. Jedes \mathfrak{J}_2 ist auch ein \mathfrak{L}_3 . — 2. Man nehme die Basiselemente von \mathfrak{L}_2 als Erzeugende eines abstrakten assoziativen Ringes $\mathfrak{U}(\mathfrak{L}_2)$ und als definierende Relationen die Gleichungen, die den Abschluß von \mathfrak{L}_2 hinsichtlich $[a, b]$ ausdrücken. $\mathfrak{U}(\mathfrak{L}_2)$ heißt universelle assoziative Algebra

von \mathfrak{L}_2 . Analog kann $\mathfrak{U}(\mathfrak{L}_3)$, $\mathfrak{U}(\mathfrak{S}_2)$, $\mathfrak{U}(\mathfrak{S}_3)$ erklärt werden. Satz: Mit \mathfrak{S}_3 hat auch $\mathfrak{U}(\mathfrak{S}_3)$ endlichen Rang. — 3. Die speziellen Systeme $\mathfrak{L}_3: [[x_i, x_j], x_k] = \delta_{ki} x_j - \delta_{kj} x_i$ und $\mathfrak{S}_3: x_i x_j x_k + x_k x_j x_i = -\delta_{ij} x_k - \delta_{kj} x_i$ haben sich als besonders wichtig für die Theorie der Mesonen in der Quantenmechanik erwiesen. Es werden die zugehörigen universellen Algebren \mathfrak{U} diskutiert und die Darstellungen durch Matrizen erforscht unter Verwendung der Darstellungstheorie Liescher Gruppen nach E. Cartan und H. Weyl. *Ernst Witt* (Hamburg).

Chevalley, Claude: Sur la classification des algèbres de Lie simples et de leurs représentations. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 1136—1138 (1948).

Skizze eines Beweises für folgende Sätze: 1. Zu einem Cartanschen System von Invarianten gehört ein und nur ein Liescher Ring. 2. Eine irreduzible Darstellung eines einfachen Lieschen Ringes ist durch ihr höchstes Gewicht eindeutig bestimmt. Die Beweismethode vermeidet Fallunterscheidungen und transzendente Hilfsmittel wie Integration; sie besteht in einer direkten Konstruktion einer Darstellung mit vorgeschriebener Eigenschaft und liefert so beide Sätze zugleich. *Eichler*.

Chevalley, Claude: Sur les représentations des algèbres de Lie simples. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 1197 (1948).

Hinweis auf eine gleichzeitig mit der vorstehend besprochenen Note erschienene Arbeit von Harish-Chandra (vgl. dies. Zbl. **32**, 252), welche ähnliches leistet.

Eichler (Münster).

Zahlentheorie:

Persson, Bengt: On a diophantine equation in two unknowns. Ark. Mat., Stockholm **1**, 45—57 (1949).

Verf. beweist Resultate über die Lösbarkeit in ganzen Zahlen x und y der Gleichung $x^2 + x + \frac{1}{4}(D+1) = y^q$, wo D eine natürliche Zahl $\equiv 3 \pmod{4}$ und q eine Primzahl ist. Es gilt z. B.: Wenn $q \geq 7$ und die Klassenzahl $h(\sqrt{-D})$ nicht durch q teilbar ist, so ist die Gleichung nur für eine endliche Anzahl von quadratfreien Zahlen D lösbar. Die Anzahl der Lösungen y ist $\leq \frac{1}{2}(q-1)$. Die Fälle $q=3$ und $q=5$ werden speziell untersucht; im letzteren Falle ist die Gleichung unlösbar für $D \geq 15$. *Nagell* (Uppsala).

Lehmer, D. H.: A conjecture of Krishnaswami. Bull. Amer. math. Soc. **54**, 1185—1190 (1948).

Für die Anzahl $T(N)$ der rechtwinkligen Dreiecke mit Umfang $\leq 2N$, deren Seiten ganze Zahlen ohne gemeinsamen Faktor sind, beweist Verf. die Formel: $T(N) = \pi^{-2} N \log 4 + O(N^{\frac{1}{2}} \log N)$. *Kloosterman* (Leiden).

Jarden, Dov: Arithmetical properties of sums of powers. Amer. math. Monthly **56**, 457—461 (1949).

Ein Polynom $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ habe die Nullstellen x_i ($i=1, \dots, n$) und es sei $s_j(p) = x_1^j + \dots + x_n^j$. Man sagt, daß eine geordnete Menge S von ganzen rationalen Zahlen $S(1), S(2), \dots, S(n)$ die Eigenschaft P hat, wenn es ein Polynom $p(x)$ mit ganzen rationalen Koeffizienten a_i gibt, für welche $S(j) = s_j(p)$ ($j=1, \dots, n$). Nach W. Järnichen ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß S die Eigenschaft P hat, daß

$$\sum_{d|m} \mu(d) S(m/d) \equiv 0 \pmod{m} \quad (m=1, 2, \dots, n).$$

Verf. zeigt, daß hier die Möbiussche Funktion $\mu(d)$ durch eine beliebige ganzwertige Funktion $f(d)$ ersetzt werden darf, welche die Bedingungen $f(1) = \pm 1$, $\sum_{d|m} f(d) \equiv 0 \pmod{m}$ ($m=1, 2, \dots, n$) erfüllt. Im Anschluß an den Järnichen'schen Satz werden außerdem einige Kongruenzen für Potenzsummen gewonnen.

Bergström (Göteborg).

Rédei, L. und A. Rényi: Über die Darstellung der Zahlen $1, 2, \dots, N$ mittels Differenzen. Mat. Sbornik, n. S. **24** (66), 385—389 (1949) [Russisch].

Verff. definieren den Begriff der Differenz-Basis: Die Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_{k(n)}$ bilden eine Differenz-Basis für die natürliche Zahl n , wenn alle $1, 2, \dots, n$ in der Form $a_i - a_j$ darstellbar sind. Sei $n^* = \min k(n)$ (für festes n). Verff. beweisen, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} n^* \cdot n^{-\frac{1}{2}}$ existiert und

$$\sqrt{2 + 4/3\pi} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n^* \cdot n^{-\frac{1}{2}} \leq \sqrt{8/3}$$

ist. Der Beweis ist auf einen Satz von J. Singer gegründet, demzufolge alle Restklassen mod $(p^2 + p + 1)$ (für alle primen p) durch $b_i - b_j$; $1 \leq i, j \leq p + 1$ repräsentierbar sind [Trans. Amer. math. Soc. **43**, 377—385 (1938); dies. Zbl. **19**, 5; s. a. S. Chowla, Proc. nat. Acad. Sci., Allahabad, **A 14**, 1—2 (1944)]. Die untere Ungleichung

folgt einfach aus der Positivität der Funktion $\left| \sum_{\nu=1}^{k(n)} e^{ia_\nu x} \right|^2$. Verff. werfen die Frage

bezüglich einer reduzierten, d. h. die Ungleichung $0 \leq a_\nu \leq n$ erfüllenden Differenz-Basis auf. Diese Frage wurde inzwischen durch P. Erdős und Ref. gelöst (dies. Zbl. **32**, 13). (Bei Abfassung dieses Artikels war uns die hier referierte Arbeit

bekannt.) Rédei vermutet, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} n^* \cdot n^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{8}{3}}$, d. h. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^* \cdot n^{-\frac{1}{2}} = 6^* \cdot 6^{-\frac{1}{2}}$

ist. Gál (Paris).

Mirsky, L.: A theorem on representations of integers in the scale of r . Scripta math., New York **15**, 11—12 (1949).

Es sei $\alpha^{(r)}(n)$ die Summe der Ziffern von n im r -adischen System ($r \geq 2$), $A^{(r)}(x) = \sum_{n \leq x} \alpha^{(r)}(n)$. Dann wird bewiesen:

$$A^{(r)}(x) = \frac{r-1}{2 \log r} x \log x + O(x).$$

Das Restglied kann nicht durch $o(x)$ ersetzt werden. Für $r = 2$ wurde diese Abschätzung bereits von R. Bellmann und H. N. Shapiro (dies. Zbl. **31**, 256) gegeben. Hlawka (Wien).

Verdenius, W.: On problems analogous to those of Goldbach and Waring. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **52**, 725—733. Indag. math., Amsterdam **11**, 255—263 (1949).

Diese Zusammenfassung der Dissertation des Verf. enthält Sätze über die Darstellung von ganzen Zahlen t in der Gestalt

$$(1) \quad t = \psi_1(y_{11}, \dots, y_{1s_1}) + \dots + \psi_n(y_{n1}, \dots, y_{ns_n}),$$

wo n, s_1, \dots, s_n positive ganze Zahlen und $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ quadratische Polynome sind, derart, daß ihre homogenen quadratischen Bestandteile nichtverschwindende Diskriminanten haben. Die ganzzahligen Veränderlichen $y_{\nu\sigma}$ sollen dabei noch zwischen gegebenen Grenzen liegen, und eine vorgeschriebene Teilmenge derselben sollen Primzahlen sein. Es werden auch noch allgemeinere Fälle betrachtet (simultane Systeme von mehreren Gleichungen vom Typus (1) und Polynome ψ_ν höheren Grades). Die Sätze haben einen außerordentlich komplizierten Wortlaut. Sie sind Anwendungen von noch allgemeineren Sätzen, die von der Corput [Acta arith., Warszawa **3**, 180—234 (1939)] mit Hardy-Littlewood-Vinogradowschen Methoden erhalten hat. Kloosterman (Leiden).

Mirsky, L.: Summation formulae involving arithmetic functions. Duke math. J. **16**, 261—272 (1949).

Verf. setzt seine Untersuchungen (dies. Zbl. **29**, 109, **31**, 256, **31**, 346) fort. Unter einer M -Funktion $F(n)$ versteht der Verf. eine arithmetische Funktion, für welche gilt: $F(1) = 1$, $F(n) = O(n^\varepsilon)$ ($n \rightarrow \infty$, $\varepsilon > 0$ beliebig), $F(p) = 1 + O(p^{-\sigma+\varepsilon})$ (p Primzahl, $\sigma > 0$, $p \rightarrow \infty$), $|f(mn)| \leq |f(m)f(n)|$ [$(m, n) = 1$, $f(m) = \sum_{d|m} \mu(d)F(m/d)$]

Dann wird z. B. folgender Satz bewiesen: Sind F_1, \dots, F_s M -Funktionen, k_1, \dots, k_s beliebige natürliche Zahlen, dann gilt $\sum_{n \leq x} F_1(n+k_1) \cdots F_s(n+k_s) = Kx + O(x^{\tau+\epsilon})$.

Dabei ist $\tau = \frac{2}{3}$ für $\sigma \geq \frac{1}{2}$ und $1 - \frac{\sigma}{2-\sigma}$ für $\sigma \leq \frac{1}{2}$ und K die konvergente Reihe

$$\sum_{1 \leq a_1, \dots, a_s} f_1(a_1) \cdots f_s(a_s) E(a_1, \dots, a_s) / [a_1, \dots, a_s].$$

Die f_i sind wie oben definiert, $[a_1, \dots, a_s]$ das kleinste gem. Vielfache von a_1, \dots, a_s , und E ist 1 oder 0, je nachdem das System $n + k_i \equiv 0 (a_i)$ ($1 \leq i \leq s$) lösbar ist oder nicht. — Für $s = 2$ wurde dieser Satz bereits von Carltitz (dies. Zbl. 6, 104) gefunden. Analoge Sätze werden angegeben. Verf. wendet sich dann den r -freien Zahlen zu, d. h. solchen, welche durch keine r -te Potenz einer Primzahl teilbar sind. Eine Zahl n heißt nun zulässig, wenn bei vorgegebenen natürlichen Zahlen $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_s$ alle Zahlen $n + k_i$ r_i -frei sind ($1 \leq i \leq s$). Es wird nun das asymptotische Verhalten der Summe

$$M(x) = \sum_{n \leq x} \mu_{r_1}(n+k_1) \cdots \mu_{r_s}(n+k_s)$$

untersucht, wo $\mu_r(n)$ 1 oder 0 ist, je nachdem n r -frei ist oder nicht. Es kann damit gezeigt werden, daß die Menge der zulässigen Zahlen nicht leer ist und positive Dichte besitzt, wenn es zu jeder Primzahl p ein n mit der Eigenschaft $n + k_i \not\equiv 0 (p^{r_i})$ ($1 \leq i \leq s$) gibt. Diese Bedingung ist natürlich auch notwendig. Zum Schluß beschäftigt sich Verf. mit einer Klasse von multiplikativen Funktionen (für die Def. sei auf die Arbeit verwiesen) und wendet die Resultate auf die Eulersche φ -Funktion an. Dabei wird auch eine Formel von Ingham [Some asymptotic formulae in the theory of numbers, J. London math. Soc. 2, 202—208 (1927)] mit Angabe des Restgliedes gewonnen. Es sei nur eine Formel herausgegriffen:

$$\sum_{n \leq x} \varphi(n) / \varphi(n+k) = x \prod_{p \nmid k} \left(1 + \frac{1}{p^2(p-1)}\right) + O(\log^2 x).$$

Hlawka (Wien).

Pukánszky, L.: Bemerkung zum Beweis des Primzahlsatzes. Elemente Math., Basel 5, 11—12 (1950).

Moser, Leo: A theorem on the distribution of primes. Amer. math. Monthly 56, 624—625 (1949).

Das Bertrandsche Postulat, wonach zwischen x und $2x$ wenigstens eine Primzahl liegt, wird hier für $x = 3 \cdot 2^{r-1}$ sehr einfach bewiesen und dann für beliebiges x sichergestellt. Die Binomialkoeffizienten $\binom{2a}{a}$ bilden auch hier das Ausgangselement des Beweises.

Hoheisel (Köln).

Shapiro, Harold N.: Some assertions equivalent to the prime number theorem for arithmetic progressions. Commun. pure appl. Math., New York 2, 293—308 (1949).

Verf. beweist für eine feste positive ganze Zahl A die „Äquivalenz“ der folgenden vier Behauptungen (die alle für sämtliche zu A teilerfremde ganze B gemeint sind): 1. $\psi(A, B, x) \sim \frac{x}{\varphi(A)}$; 2. $\sum_{n=B(\bmod A)}^{\mu(n)}$ ist konvergent; 3. $\sum_{\substack{n \leq x \\ n=B(\bmod A)}} \mu(n) = o(x)$;

4. $\sum_{\substack{n \leq x \\ n=B(\bmod A)}} \frac{\mu(n) \log n}{n} = o(\log x)$. Hier ist μ die Moebiusche, φ die Eulersche zahlentheoretische Funktion und $\psi(A, B, x) = \sum \log p$, wo die Summe erstreckt ist über sämtliche Primzahlpotenzen p^α , die $\leq x$ und $\equiv B(\bmod A)$ sind. Verf. macht die Übergänge $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, und dabei ist die „Äquivalenz“ genauer so zu verstehen, daß er bei den Beweisen keine komplexe Funktionentheorie benutzt, sondern

nur elementar-zahlentheoretische Hilfsmittel sowie partielle Summation und die Tatsache, daß $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} \neq 0$ ist für jeden nicht-Hauptcharakter $\chi \bmod A$.

Kloosterman (Leiden).

Salié, H.: Über den kleinsten positiven quadratischen Nichtrest nach einer Primzahl. *Math. Nachr.* **3**, 7—8 (1950).

Verf. betrachtet für jede Primzahl $p \geq 3$ den zugehörigen kleinsten quadratischen Nichtrest $n(p)$ und beweist, daß $n(p) = O(\log p)$, d. h. $\lim n(p) (\log p)^{-1} \geq c > 0$. Der einfache Beweis ist auf einen Satz von U. V. Linnik gegründet: In jeder arithmetischen Progression $dx + l$, wo $(d, l) = 1$ ist, existiert eine Primzahl $q < d^k$ (k unabhängig von d) [*Mat. Sbornik*, n. S. **15**, 139—178 und 347—368 (1944)]. — V. R. Fridlender hat ebenfalls den obigen Satz des Verf. ungefähr gleichzeitig bewiesen (*dies. Zbl.* **33**, 352). Für die obere Abschätzung erwähnt Verf. nur die Ungleichung von I. M. Vinogradov $n(p) < p^{1/\sqrt{2}e} (\log p)^2$ [*Trans. Amer. math. Soc.* **29**, 218—226 (1927)]. Wir bemerken noch, daß die Vinogradovsche Vermutung $n(p) = O(n^\varepsilon)$ für fast alle p gültig ist [U. V. Linnik, *C. R. Acad. Sci. URSS*, n. S. **36**, 119—120 (1942)].

Gál (Paris).

Rényi, Alfred: Probability methods in number theory. (Inaugural lecture, for attaining venia legendi at the University of Budapest, held January 20, 1949). *Publ. math. coll.*, Budapest **1**, Nr. 21, 1—9 (1949).

Es sei E ein Wahrscheinlichkeitsfeld im Sinne Kolmogoroffs, F die Menge der zufälligen Ereignisse und $P(G)$ die für die Elemente G von F definierte Wahrscheinlichkeit. Verf. definiert die Diskrepanz $D_G(u)$ einer zufälligen Größe $u(\xi)$ auf der (zu F gehörigen) Menge G durch die Formel

$$D_G(u) = (V^G, V) \cdot \sqrt{\frac{P(G)}{1 - P(G)}}.$$

Hier ist $V^G(x)$ die durch $V^G(x) = P(A_x \cdot G)/P(G)$ definierte Verteilungsfunktion von $u(\xi)$ in bezug auf G (A_x ist die Menge aller ξ mit $u(\xi) < x$) und (V^G, V) ist die „Distanz“ von V^G und V . Die Distanz (U, V) von zwei Verteilungsfunktionen U und V (von denen U als konstant vorausgesetzt wird in jedem Intervall, in dem V konstant ist) wird dabei erklärt als die positive Quadratwurzel aus dem Hellinger-

Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2(U - V)}{dV}$. Verf. beweist: Falls u_1, u_2, \dots eine Folge von zufälligen Größen ist, welche zu je zweien unabhängig sind, und falls $0 < P(G) < 1$ vorausgesetzt wird, so ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_G^2(u_n) \leq \frac{1}{1 - P(G)}.$$

Verf. führt weiter den Begriff „fast-unabhängig“ ein und erweitert den erwähnten Satz auf den Fall, in dem „unabhängig“ durch „fast-unabhängig“ ersetzt wird. Die zahlentheoretischen Anwendungen dieses verallgemeinerten Satzes werden vom Verf. später publiziert werden.

Kloosterman (Leiden).

Mikolás, Miklós: Sur l'hypothèse de Riemann. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **228**, 633—636 (1949).

Es sei q_ν der ν -te Bruch in der Fareyschen Reihe der Ordnung $[x]$. Die Anzahl dieser Brüche ist $\Phi(x) = \sum_{n=1}^{[x]} q(n)$. Dann zeigt Verf.: Die Riemannsche Vermutung ist dann und nur dann richtig, wenn für $|\lambda| < 2\sqrt{5/\zeta(3)} - 4,078 \dots$, $\lambda \neq 0$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$(1) \quad \sum_{\nu=1}^{\Phi(x)} e^{\lambda q_\nu} - \frac{e^\lambda - 1}{\lambda} \Phi(x) = o(x^{1+\varepsilon}).$$

Es ist dies ein Gegenstück zu dem bekannten Satz von Franel. **Man kann analoge Sätze aufstellen, wenn man in (1) $e^{\lambda t}$ durch $\cos \lambda t$, $\sin \lambda t$ usw. ersetzt.**

Hlawka (Wien).

Neville, E. H.: The structure of Farey series. Proc. London math. Soc., II. S. 51, 132—144 (1949).

Die Arbeit stellt sich die Aufgabe, die Fareyreihen n -ter Ordnung F_n möglichst zweckmäßig aufzustellen und zu zeigen, wie sie bei der Auflösung diophantischer Gleichungen, deren Koeffizienten groß sind, praktisch zu verwenden sind. Dies ist von Bedeutung, denn für die Anzahl der Terme von F_n zwischen a/b und c/d ($ad - bc = 1$) (welche gleich der Anzahl der Gitterpunkte mit relativprimen Koordinaten in dem durch $x = 0$, $y = 0$, $x/l + y/m = 1$, $l = a/d$, $m = b/d$ begrenzten Dreieck ist) gilt, wie der Verf. zeigt,

$$(1) \quad \frac{3}{\pi^2} l m + O\{\max(l \log m, m \log l)\}.$$

Es ist also die Gesamtanzahl der Terme von $F_n \sim [3n^2/\pi^2]$. Aus (1) kann noch geschlossen werden, daß die Anzahl der Terme in jedem Teilintervall von $(0, 1)$ der Länge ϱ angenähert $\frac{3n^2}{\pi^2} \varrho$ ist, also angenähert proportional der Länge. Der dabei

begangene mittlere Fehler ist von der Größenordnung $\frac{\log n}{n}$. — Es sei nun eine diophantische Gleichung $vx - uy = \pm 1$, $(v, u) = 1$, gegeben. Ist $u \leq v \leq n$, so liefern, wie bekannt, sofort die Terme von F_n , welche u/v am nächsten sind, eine Lösung. Ist die obige Voraussetzung über die Größenordnung der u, v nicht erfüllt, so geht Verf. so vor: Es wird die Transformation $x = cX + aY$, $y = dX + bY$ gemacht, wo $a/b, c/d$ die Terme aus F_n sind, zwischen denen u/v liegt. Die Gleichung geht dabei (bei passender Numerierung von X, Y) über in $v_1 x_1 - u_1 y_1 = \pm w$ ($v_1 < u_1$) und es ist $v/v_1 > n/2$. Dieser Prozeß kann natürlich iteriert werden. Ein numerisches Beispiel zeigt die Brauchbarkeit des Verfahrens. Ein ähnliches Verfahren verwendet Verf. bei der Bestimmung von Näherungsbrüchen einer Irrationalzahl m und gibt als Beispiel für die Eulersche Konstante C den Näherungsbruch $9062634/15700603$ mit einem Fehler $< 1 \cdot 10^{-6}$ an. Nun wendet sich Verf. der tatsächlichen Aufstellung von F_n zu und betrachtet zunächst die Reihe D_n der Zähler. Da die Reihe für $n > 1$ symmetrisch in bezug auf 2 ist, genügt es, die Hälfte der Reihe aufzustellen. Verf. zeigt: Ist $n \leq [3m/2] + 1$, so wird D_n aus D_m so gebildet, daß zwischen benachbarten Termen b, d ($b > d$) von D_m so viele Terme der arithmetischen Reihe $b + ld$ untergebracht werden, als nur möglich ist. Um die volle Reihe F_n zu erhalten, müssen noch die Nenner bestimmt werden. Hier gilt folgendes: Die Nenner in dem Abschnitt zwischen $\frac{1}{m+1}$ und $\frac{1}{m}$ sind die Terme einer D_j mit $j \geq [\frac{n}{m}]$, ausgenommen, daß irgendeine Zahl h in dem ersten irreduziblen Bruch in der Folge $\frac{h}{n}, \frac{h}{n-1}, \dots$ der Nennerreihe auftritt.

Hlawka (Wien).

Wall, H. S.: Note on a periodic continued fraction. Amer. math. Monthly 56, 96—97 (1949).

$f_1 = 1, f_2 = 1 + a, \dots, f_n$ sei die Folge der Näherungsbrüche des unendlichen periodischen Kettenbruches

$$1 + \frac{a}{1} + \frac{a}{1} + \dots,$$

wobei a keine reelle Zahl $< -1/4$ sein soll, und $U_1(x), U_2(x), \dots, U_n(x)$ seien die Näherungsbrüche des unendlichen periodischen Kettenbruches

$$x - \frac{x^2 - x - a}{2x - 1} - \frac{x^2 - x - a}{2x - 1} - \dots;$$

dann gilt, wie Verf. beweist: (1) $U_m(f_n) = f_{m \cdot n}$, $m, n = 1, 2, 3, \dots$. Hieraus folgt z. B.: Berechnet man eine Wurzel von $x^2 - x - a = 0$ nach dem Newtonschen Verfahren, indem man als 1. Näherungswert f_n nimmt, so erhält man beim Newtonschen Verfahren die weiteren Näherungswerte $x_1 = f_{2n}$, $x_2 = f_{4n}$, $x_3 = f_{8n}$, \dots . Die Behauptung (1) ist wegen $U_n(1) = f_n$ in der allgemeineren Formel $U_m(U_n(x)) = U_{m \cdot n}(x)$ enthalten, die elementar zu beweisen ist. *Heinhold*.

Obrechhoff, Nikola: Sur l'approximation des nombres irrationnels. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 352—353 (1949).

Es werden die Abschätzungen $|wx - y| \leq 1/(n+1)$ bzw. $\leq 1/(n+2)$ für $0 < w < 1$ bei ganzzahligem y und x mit $1 \leq x \leq n$, (genauere Abschätzungen wurden bereits 1921 von O. Perron, S.-B. Heidelberger Akad. Wiss. math.-naturw.

Kl. **1921**, Nr. 4 angegeben) und allgemeiner $\left| \sum_{v=1}^m w_v x_v - z \right| \leq 1/(n+1)^m$ für reelle w_v bei ganzzahligen z und x mit $|x_v| \leq n$ ohne Beweis angeführt. *Heinhold*.

Obrechhoff, Nikola: Sur l'approximation diophantique linéaire. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. **6**, 283—285 (1949).

Es werden die in der vorsteh. besprochenen Arbeit angegebenen Abschätzungen und weiterhin der Satz bewiesen: Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Linearform $\sum_{v=1}^n a_v x_v$ mit ganzzahligen Koeffizienten a_v mod n^m die Reste $0, 1, 2, \dots, n^m - 1$ annimmt, wenn die Veränderlichen x_1, x_2, \dots, x_n die Werte $0, 1, 2, \dots, n-1$ annehmen, besteht darin, daß die Koeffizienten a_v abgesehen von der Reihenfolge gleich Zahlen $b_\mu n^{\mu-1}$ mit zu n relativ primen ganzen Zahlen b_μ sind, $\mu, v = 1, 2, 3, \dots, m$. *Heinhold* (München).

Rankin, R. A.: On sums of powers of linear forms. I. Ann. Math., Princeton, II. S. **50**, 691—698 (1949).

$f(x)$ bezeichne die Distanzfunktion $\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^\beta \right)^{1/\beta}$ ($\beta > 0$). Verf. beschäftigt sich mit der Abschätzung des ersten Minimums $M_1 = \min_{g \neq 0} f(g)$ über alle Gitterpunkte g eines Gitters G mit Determinante $D \neq 0$. Eine erste Abschätzung wurde von Minkowski für $\beta \geq 1$ mit Hilfe seines Fundamentalsatzes gegeben. Die erste Verschärfung dieser Abschätzung für $\beta = 2$ wurde von Blichfeldt [vgl. z. B. „The minimum value of quadratic forms and the closest packing of spheres“, Math. Ann., Berlin **101**, 605—608 (1929)] erzielt. Für $\beta \geq 2$ wurden von van der Corput und Schaafe (dies. Zbl. **15**, 104) analoge Abschätzungen hergeleitet, ebenso vom Ref. [„Über Potenzsummen von Linearformen“, S.-B. Akad. Wiss. Wien **154**, 50—58 (1945)]. Verf., welcher bereits in einer bedeutenden Arbeit (dies. Zbl. **29**, 345) für $\beta = 2$ über die Blichfeldtschen Schranken hinausgekommen ist, liefert jetzt für $\beta > 2$ ebenfalls weitere Verschärfungen, welche die bis jetzt schärfsten darstellen. *Hlawka* (Wien).

Rankin, R. A.: On sums of powers of linear forms. II. Ann. Math., Princeton, II. S. **50**, 699—704 (1949).

Jetzt wird der Fall $\beta \leq 2$ behandelt. Die erste Verschärfung der Minkowskischen Schranke erzielte wieder, und zwar für $\beta = 1$, Blichfeldt (dies. Zbl. **13**, 345). Weitere Verschärfungen für $\beta \leq 2$ stammen von Hua [A remark in a result due to Blichfeldt. Bull. Amer. math. Soc., II. S. **51**, 537—539 (1945)], Mullender (z. B. dies. Zbl. **31**, 348) und dem Ref. [„Über Potenzsummen von Linearformen II. S.-B. Akad. Wiss. Wien **156**, 247—254 (1948)] vor allem für großes n . Verf. gibt auch in dieser Arbeit Schranken, welche besser sind als die bisher bekannten. Diese Untersuchungen hat Verf. noch fortgesetzt in dem dritten Teil dieser Reihe von Arbeiten (dies. Zbl. **31**, 204). *Hlawka* (Wien).

Davenport, H. and C. A. Rogers: A note on the geometry of numbers. J. London math. Soc. **24**, 271—280 (1950).

The following result is proved: Let $G(x_1, \dots, x_r)$ and $E(x_1, \dots, x_r)$ be distance functions of r variables, and let $H(x_{r+1}, \dots, x_n)$ be a distance function of $n-r$ variables, where $1 \leq r \leq n-1$. Then the star bodies in n -dimensional space defined by

$$(G(x_1, \dots, x_r))^{r/n} (H(x_{r+1}, \dots, x_n))^{(n-r)/n} \leq 1$$

and

$$(G(x_1, \dots, x_r))^{r/n} (E(x_1, \dots, x_r) + H(x_{r+1}, \dots, x_n))^{(n-r)/n} \leq 1$$

have the same critical determinant (possibly infinite). As an application the critical determinants of $|x(x^2 + y^2)| \leq 1$ and $|x(-x^2 + y^2 + z^2)| \leq 1$ are studied.

K. Mahler (Manchester).

Ollerenshaw, Kathleen: The critical lattices of a four-dimensional hypersphere. J. London math. Soc. **24**, 190—200 (1949).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **31**, 205) hat Verf. die kritischen Gitter der Einheitskugel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1$ ermittelt. In dieser Note werden nach derselben Methode die kritischen Gitter für die vierdimensionale Einheitskugel hergeleitet.

Heinhold (München).

Analysis.

Mengenlehre.

Fraïssé, Roland: Sur la comparaison des types de relations. C. r. Acad. Sci., Paris **226**, 987—988 (1948).

Die Relation $R(x, y)$ zwischen zwei Elementen x, y sei auf einer „Basismenge“ B so definiert, daß sie je zwei verschiedenen Elementen a_1, a_2 von B entweder den Wert $R(a_1, a_2) = +$ oder den Wert $R(a_1, a_2) = -$ zuordnet, wobei die „Werte“ $+$, $-$ der Menge B nicht angehören sollen. Wenn R, R' auf B, B' definiert sind, sollen R und R' demselben Relationstyp T angehörig heißen, wenn es eine eindeutige Zuordnung Φ zwischen B und B' gibt, so daß stets $R(a_1, a_2) = R'(\Phi a_1, \Phi a_2)$ ist. T heiße ein endlicher oder abzählbarer Typus, wenn die zugehörigen Mengen B endlich oder abzählbar sind. T' heiße niedriger als T ($T' < T$), wenn es zu einer auf B definierten Relation R des Typus T eine auf einer Teilmenge B' definierte Relation R' des Typus T' gibt, so daß $R'(a_1, a_2) = R(a_1, a_2)$, falls a_1, a_2 in B' liegen. T heiße auch höher als T' ($T > T'$). — Zwei Typen T, T' sollen gleichartig heißen ($T \approx T'$), wenn $T > T'$ und zugleich $T < T'$ gilt (wobei T, T' immer noch verschieden sein können). Die Beziehung $T \approx T'$ bewirkt eine Einteilung der Relationstypen in Äquivalenzklassen. Jede Menge solcher Typenklassen ist nach dem Zeichen $<$ geordnet (wenigstens teilweise), insofern man schreiben kann „Klasse $C <$ Klasse C' “, wenn ein Typus aus C niedriger als einer aus C' ist. — Endlich heiße T' streng höher als T ($T' >> T$), wenn $T' > T$, aber nicht $T' < T$ ist; analog $T' << T$. — Auf Grund vorstehender Definitionen führt Verf. eine Reihe von Sätzen über endliche oder abzählbare Relationstypen an (deren Beweise später erscheinen sollen), u. a. diese: 1. Es gibt 4 abzählbare Typen, so daß jeder beliebige abzählbare Typ höher als einer dieser 4 ist. — 2. Es gibt abzählbare Typen T , die höher sind als jeder abzählbare Typus; diese Typen (deren Menge die Mächtigkeit des Kontinuums hat) heißen reich; nicht reiche heißen arm. — 4. Zu jeder endlichen oder abzählbaren Menge von armen Typen T_i gibt es einen armen Typ $T >> T_i$ für alle i . — 5. Wenn $B = B' \cup B''$ mit $B' \cap B'' = \emptyset$ und die Relation R vom Typus T auf B definiert ist, so sind damit Relationen R', R'' auf B', B'' definiert, und man sagt, daß ihre Typen T', T'' durch Zweiteilung aus T entstehen. War T reich, so ist es auch wenigstens noch einer der Typen T', T'' . — 6. T heiße unzerlegbar, wenn bei jeder Zweiteilung von T einer der entstehenden Typen $\approx T$ ist. Zu jedem armen Typ T gibt es ein unzerlegbares armes $T' > T$.

Neumer (Mainz).

Fraïssé, Roland: Sur la comparaison des types d'ordres. C. r. Acad. Sci., Paris **226**, 1330—1331 (1948).

Für die Terminologie i. b. a. die Ordnungstypen vgl. vorsteh. Referat. Die Bezeichnung „reich“ für einen abzählbaren Ordnungstypus T wird jetzt dahin spezialisiert, daß $T \approx \eta$ sein muß, wo η den Typus der geordneten Menge der rationalen Zahlen bedeutet. Im anderen Fall heißt T arm ($T < \eta$). — Verf. spricht (wieder ohne Beweise, die später veröffentlicht werden sollen) eine Reihe von Sätzen aus, darunter folgende: 1. Ein abzählbarer Ordnungstypus T ist genau dann reich, wenn $T > \alpha$ für jede abzählbare Ordnungszahl α . — 2. Zu jeder endlichen oder abzählbaren Menge von armen Ordnungstypen T_i gibt es einen armen Ordnungstyp $T >> T_i$ für alle i . — 3. Jeder arme Ordnungstyp T ist die Summe einer endlichen oder einer ω -Folge oder einer ω^* -Folge von Typen $T_i < T$. — 4. 1. Ein Wohlordnungstypus ist genau dann unzer-

legbar im Sinne des Verf., wenn er additiv unzerlegbar ist im Sinne der Arithmetik der Ordnungszahlen. — 4. 2. Zu jedem armen T gibt es ein unzerlegbares armes $T' > T$. — 4. 3. Jeder unzerlegbare Typus T läßt wenigstens eine Zweiteilung in T' , T'' zu, so daß $T' \approx T'' \approx T$. — 5. Die Ableitung einer abzählbaren Menge E von Punkten einer Geraden ist höchstens abzählbar oder von der Mächtigkeit des Kontinuums, je nachdem der Typus von E arm oder reich ist. Neumer (Mainz).

Kurepa, Georges: L'hypothèse du continu et le problème de Souslin. Acad. Serbe, Bull. Acad. Sci. math. natur., A 2, 26—36 u. serb. Zusammenfassg. 36 (1948).

Verf. hat in früheren Arbeiten gezeigt, daß das Problem von Souslin (nämlich das Problem, ob eine stetige geordnete Menge, in der höchstens abzählbar viele Intervalle paarweise punktfremd sein können, einer Menge der Größe nach geordneter reeller Zahlen ähnlich ist) eng verknüpft ist mit solchen teilweise geordneten Mengen E , die folgende drei Bedingungen erfüllen: (a) $bE \leq \aleph_0$; dabei bedeutet bE die obere Grenze der Mächtigkeiten der (wachsend oder fallend) wohlgeordneten Teilmengen von E oder derjenigen Teilmengen von E , deren Punkte paarweise unvergleichbar sind. — I. Jede geordnete Teilmenge von E ist wohlgeordnet. — II. Ist a ein beliebiger Punkt von E , so ist die Teilmenge aller a vorangehenden Punkte geordnet. — In der vorliegenden Arbeit zeigt Verf., daß enge Beziehungen bestehen zwischen dem Kontinuumproblem und solchen teilweise geordneten Mengen E , welche (lediglich) den vorstehenden Bedingungen (a) und I genügen: solche Mengen nennt Verf. teilweise wohlgeordnet. E soll im folgenden eine teilweise wohlgeordnete Menge bedeuten. — Verf. definiert die folgenden Teilmengen von E : $R_0 E$ als die Menge der ersten Punkte von E ; induktiv $R_\alpha = R_0(E - \sum R_\xi E)$ ($\xi < \alpha$). γE soll die erste Ordnungszahl ξ bedeuten, für die $R_\xi E = 0$ ist. Wenn $\alpha < \beta < \gamma E$, so ist $R_\alpha E \cdot R_\beta E = 0$; zu jedem $b \in R_\beta E$ gibt es mindestens ein $a \in R_\alpha E$, so daß $a < b$. Auf die Mengen $R_\alpha E$ gründet Verf. die Einführung weiterer Teilmengen von E und für E charakteristischer Ordnungszahlen. Von den Resultaten, die er so erhält, seien die folgenden hervorgehoben (Numerierung vom Ref.): (A) Wenn $\gamma E \geq \omega_1$ ist und wenn jede Menge $R_\alpha E$ ($\alpha < \gamma E$) endlich ist, so gibt es eine nicht abzählbare wohlgeordnete Teilmenge von E ; folglich muß $\gamma E < \omega_1$ und $\bar{E} \leq \aleph_0$ sein, falls $bE \leq \aleph_0$ und $\bar{R}_\alpha E < \aleph_0$ für $\alpha < \gamma E$ gilt. — (B) Mittels einer Wohlordnung des Kontinuums läßt sich eine Menge E angeben, für die $bE = \aleph_0$ und $\bar{E} = 2^{\aleph_0}$ ist. — (C) Es ist stets $\bar{E} \leq 2^{bE}$. (Diese Beziehung trifft nach einer Bemerkung des Verf. sogar für beliebige teilweise geordnete Mengen zu.) — Aus (B) und (C) folgt: (D) Notwendig und hinreichend für das Bestehen der Relation $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ist, daß für jede teilweise wohlgeordnete Menge E mit $bE \leq \aleph_0$ gilt: $\bar{E} \leq \aleph_1$. — Als Gegenstück zu (A): (E) Wenn $bE = \aleph_0$ und $\bar{R}_\alpha E = \aleph_0$ für $\alpha < \gamma E$, so läßt sich von γE nur sagen, daß $\gamma E < \omega_{N(0)+1}$, wo $\aleph_{N(0)} = 2^{\aleph_0}$ [folgt aus (C)]; die Annahme $\gamma E < \omega_2$ ist also gleichwertig der Annahme $N(0) = 1$ [folgt aus (B)]. Neumer (Mainz).

Kurepa, G.: Ensembles de suites dénombrables d'entiers (Contribution au problème de Suslin). Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 11, 59–66 und russische Übersetzung 67–74 (1947).

Es wird die Menge C aller Folgen $(n_0, n_1, n_2, \dots, n_\xi, \dots)_{\xi < \alpha}$ von ganzen, nicht negativen Zahlen n_ξ betrachtet, wo ξ die Ordnungszahlen $< \alpha$ durchläuft und $\alpha < \Omega$. Diese Menge wird teilweise geordnet, indem $(n_0, n_1, \dots, n_\xi, \dots)_{\xi < \alpha} < (m_0, m_1, \dots, m_\xi, \dots)_{\xi < \beta}$ dann und nur dann gelten soll, wenn $\alpha < \beta$ und $n_\xi = m_\xi$ für $\xi < \alpha$ ist; zwei solche Elemente heißen dann vergleichbar. Es werden zwei hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß eine Teilmenge von C eine un abzählbare Menge von paarweise unvergleichbaren Elementen enthält. Vgl. auch die früheren Arbeiten des Verf. [Publ. Math. Univ. Belgrade 4, 1–138 (1935) und 6/7, 129–160 (1938); dies. Zbl. 4, 394; 20, 108]. H. Hornich (Graz).

Everett, C. J. and G. Whaples: Representations of sequences of sets. Amer. J. Math. **71**, 287—293 (1949).

Une famille $(E_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles, distincts ou non, d'un ensemble E , est dite représentable s'il existe une application biunivoque $(x_i)_{i \in I}$ de I dans E , telle que $x_i \in E_i$ pour tout $i \in I$. — L'A. donne d'abord une nouvelle démonstration du théorème de Hall donnant le critère de représentabilité pour I fini. — Puis il montre, en utilisant le lemme de Zorn, que lorsque E_i est fini pour tout $i \in I$, le critère de représentabilité est que toute sous-famille finie soit représentable. — Il étend ensuite ce résultat au cas où l'on impose à la représentation $(x_i)_{i \in I}$ d'avoir un point x_i au plus dans tout élément d'une partition donnée de E . Il termine par une nouvelle démonstration d'un théorème de Bruijn. G. Choquet (Grenoble).

Simonson, W.: Sur les correspondances multivoques entre deux ensembles abstraits. Acta math., Uppsala **81**, 291—297 (1949).

Für zwei Mengen A, B mit den Elementen a, b sei eine gewisse Menge f von geordneten Elementenpaaren (a, b) definiert. Man sagt, f bilde A auf B ab (in Zeichen: $fA = B$), wenn bei den Elementenpaaren von f alle Elemente von A als erste Elemente und auch alle Elemente von B als zweite Elemente vorkommen. Ist f eine Menge von Paaren (a, b) , so ist f^{-1} die Menge der Paare (b, a) . — Die Menge $M \subset A$ heißt Invariante (bezüglich f), wenn $f^{-1}fM = M$ ist. Ist $C \subset A$, so ist

$$M_C = C + f^{-1}fC + f^{-1}ff^{-1}fC + \dots$$

die kleinste Invariante, die C enthält. Für zwei beliebige Elemente a, a' von A sind die beiden Mengen $M_{\{a\}}, M_{\{a'\}}$ identisch oder elementenfremd. Für eine gegebene Abbildung f zerfällt somit A eindeutig in eine Menge elementenfremder invarianter Teilmengen

$$A = M_{\{a\}} + M_{\{a'\}} + \dots$$

Eine Menge M ist genau dann invariant, wenn sie Summe solcher invarianter Teilmengen ist. — Ist M invariante Teilmenge von A bezüglich f , so ist $N = fM$ invariante Teilmenge bezüglich f^{-1} . Kamke (Tübingen).

Hadwiger, H.: Die Multikongruenz und der Satz von Banach und Tarski. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **16**, 48—53 (1949).

Zwei Punktmengen A und B des k -dimensionalen euklidischen Raumes heißen multikongruent vom Grade n ($A \stackrel{n}{\simeq} B$), wenn es Zerlegungen $A = A_1 + \dots + A_n$, $B = B_1 + \dots + B_n$ in je n fremde Teilmengen gibt, so daß A_ν und B_ν ($\nu = 1, \dots, n$) kongruent sind ($A_\nu \simeq B_\nu$). Die einzelnen A_ν bzw. B_ν können dabei leer sein. — Haupteigenschaften der Multikongruenz sind: (I) $A \stackrel{n}{\simeq} A$; (II) Aus $A \stackrel{n}{\simeq} B$ folgt $B \stackrel{n}{\simeq} A$; (III) Aus $A \stackrel{n}{\simeq} B$, $B \stackrel{m}{\simeq} C$ folgt $A \stackrel{mn}{\simeq} C$; (IV) Aus $A_1 \subseteq A$, $A \stackrel{n}{\simeq} B$ folgt die Existenz eines $B_1 \subseteq B$, so daß $A_1 \stackrel{n}{\simeq} B_1$. (V) Aus $A \supseteq B \supseteq C$, $A \stackrel{n}{\simeq} C$ folgt $A \stackrel{n+1}{\simeq} B$. — (I)—(IV) sind trivial, für (V) gibt Verf. einen neuen Beweis. — Das Ziel des Verf. ist es, einen einfachen Beweis für den folgenden Kongruenzsatz von Banach und Tarski zu geben: Sind N und M zwei beschränkte Punktmengen des 3-dimensionalen euklidischen Raumes, die beide innere Punkte aufweisen, so gibt es einen endlichen Grad n , so daß $N \stackrel{n}{\simeq} M$ ist. — Indem Verf. die Mengen M und N in solche Lage bringt, daß ein innerer Punkt von M mit einem inneren Punkt von N zusammenfällt, gewinnt er zwei abgeschlossene Kugeln K und K_0 mit den Eigenschaften $K \subset N$, $M \subset N \vdash M \subseteq K_0$ und kann auf K die bekannte Hausdorffsche Zerlegung anwenden: $K = A + B + C + F + Z$; dabei ist Z das Zentrum von K , und die übrigen 4 Mengen bestehen aus Kugelradien (ohne Z , mit Oberflächenpunkten). F besteht aus abzählbar vielen Radien, für die drei anderen Mengen gelten die Beziehungen $A \simeq B \simeq C \simeq B + C$, aus denen sich beliebig viele weitere Zerlegungen und Kongruenzbeziehungen herleiten lassen, z. B.

für jede ganze Zahl $m \geq 1$: $A = \sum_{v=1}^m A'_v$, $B = \sum_{v=1}^m B'_v$, wobei $A'_v \simeq A$, $B'_v \simeq B$.

Durch Ausnutzung dieses Umstandes und der Abzählbarkeit der Menge der F bildenden Radien sowie mit Hilfe einer Überdeckung von K_0 durch endlich viele mit K kongruente Kugeln gelangt Verf. unter Verwendung obiger Eigenschaften (I)–(V) zu der Beziehung $M \simeq_n N$, wo $n < \left\{ 1 + 2420 \left(\frac{R_0}{R} \right)^6 \right\}^2$ sich ergibt, unter R, R_0 die Radien von K, K_0 verstanden. — Das Ergebnis läßt sich auf den $k (\geq 3)$ -dimensionalen Raum ausdehnen. Neumer (Mainz).

Hadwiger, H.: Bemerkung zu einer Größenrelation bei Punktmengen. *Portugaliae Math.* **6**, 45–48 (1947).

Verf. nennt eine Ordnungsbeziehung, $A < B$, zwischen den Punktmengen A, B, \dots des k -dimensionalen euklidischen Raumes eine „Größenrelation“, wenn folgende Forderungen erfüllt sind: 1. Aus $A < B$ und $B < C$ folgt $A < C$; 2. Aus $A < B$ folgt B nicht $< A$ für beschränkte Mengen A, B ; 3. Für beschränktes A ist stets A nicht $< A$. Er zeigt, daß die folgende von J. von Neumann [Zur allgemeinen Theorie des Maßes. *Fundam. Math.*, Warszawa **13**, 73–116 (1929)] stammende Ordnungsrelation diesen Bedingungen genügt: Es gelte $A < B$ dann und nur dann, wenn es eine eindeutige Abbildung $f(a), a \in A$, von A auf B gibt, welche alle positiven Abstände vergrößert: $\|a, a'\| < \|f(a), f(a')\|$ für $a \neq a'$ aus A . — Durch ein Beispiel wird gezeigt, daß für zwei Mengen A, B mit gleichem Durchmesser durchaus $A < B$ stehen kann. Aumann (Würzburg).

Borel, Émile: Sur la somme vectorielle de deux ensembles de mesure nulle dont un seul est parfait. *C. r. Acad. Sci., Paris* **227**, 790–792 (1948).

Siano: F un insieme perfetto e di misura nulla contenuto nell'intervallo $[0, 1]$, G un altro insieme di misura nulla ovunque denso in $[0, 1]$. Si considerano individuati: F dalla successione dei suoi intervalli contigui b_n ($n = 1, 2, \dots$), G da una successione infinitesima (e ovunque densa in $[0, 1]$) d'intervalli s_n ($n = 1, 2, \dots$) tali, che ogni punto di G sia interno a infiniti s_n . Le dette successioni si suppongono ordinate in modo che, indicando con gli stessi simboli b_n, s_n le ampiezze dei relativi intervalli, risulti sempre $b_n \geq b_{n+1}, s_n \geq s_{n+1}$. — In analogia con la nota (questo Zbl. **33**, 352). l'A. definisce, come segue, le rarefazioni r di F , r' di G :

$$r = \max \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{\log n}{\log b_n} \right), \quad r' = \max \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{\log n}{\log s_n} \right).$$

Enuncia il teor.: se $r + r' < 1$, la somma vettoriale di F, G (Cfr. loc. cit.) ha misura nulla. Termina con esempi ed osservazioni critiche. Tullio Viola.

Denjoy, Arnaud: L'ordre de nullité métrique des ensembles parfaits minces. *C. r. Acad. Sci., Paris* **227**, 928–931 (1948).

Con riferimento a note di E. Borel [*C. r. Acad. Sci., Paris* **227**, 453–455 (1948) e questo Zbl. **33**, 352], l'A. studia certe particolari proprietà metriche degli insiemi perfetti P di numeri reali, ovunque non densi. Dà una condizione, necessaria e sufficiente, affinché un tale insieme P goda della proprietà: se x e y sono due variabili che descrivono P , indipendentemente l'una dall'altra e con la sola condizione $x < y$, l'insieme di tutte le differenze $y - x$ che così s'ottengono, è un intervallo chiuso. La nota contiene una dettagliata bibliografia, con numerose osservazioni critiche ed esempi. Tullio Viola (Roma).

Moran, P. A. P.: On plane sets of fractional dimensions. *Proc. London math. Soc.*, II. S. **51**, 415–423 (1949).

L'A. améiore des résultats précédents de Besicovitch et Moran. — Dans le plan xOy , on désignera par $A^m E$ la mesure m -dimensionnelle d'un ensemble E plan. — Soit $A \subset x'x$, $B =$ intervalle $(0, h) \subset y'y$, et $C = A \times B$. Théorème: Si $0 < A^\alpha A < \infty$, on a $A^{1+\alpha} C \geq F(\alpha + 2) 2^{-\alpha} [F(1 + \alpha/2)]^{-2} h A^\alpha A$ et ce

résultat est le meilleur possible. Il n'existe aucune constante k telle que

$$A^{1+\alpha} C = k h A^\alpha A.$$

Soit maintenant C un ensemble plan dont la projection A sur $x'x$ est de α -mesure positive finie, et dont la β -mesure sur toute parallèle à $y'y$ (et rencontrant A) est positive. Théorème: On a: $\alpha + \beta \leq \dim. C \leq 1 + \alpha$ et les deux bornes peuvent être atteintes.

G. Choquet (Grenoble):

Zahorski, Z.: On a problem of G. Choquet. Časopis Mat. Fysiky, Praha 73, 69—77 und tschechische Zusammenfassg. 77 (1948).

L'A. montre que sur tout continu C du plan complexe, non identique au plan entier, il existe une fonction complexe $f(z)$, finie et continue, possédant en tout point $z \in C$ une dérivée (par rapport à C) finie et continue, et qui n'a pas de dérivée seconde (finie ou infinie) en un certain point frontière z_0 de C . — Il en résulte que le théorème sur l'existence des dérivées de tous ordres des fonctions monogènes ne peut s'étendre aux fonctions définies seulement sur un sous-continu plan. La question se pose d'ailleurs de savoir si l'ensemble de tels points z_0 est assez raréfié ou non.

G. Choquet (Grenoble):

Sierpiński, Wacław: Sur l'analyticité de l'espace D_ω au sens de M. Menger. Fundam. Math., Warszawa 35, 208—212 (1948).

K. Menger hat einen metrischen separablen Raum M analytisch genannt, wenn es möglich ist, jeder endlichen Folge n_1, n_2, \dots, n_k natürlicher Zahlen eine abgeschlossene Teilmenge $A_{n_1 n_2 \dots n_k}$ von M zuzuordnen, so daß die beiden Bedingungen erfüllt sind: 1. Es gibt für jeden Punkt p von M eine unendliche Folge natürlicher Zahlen n_1, n_2, \dots mit der Eigenschaft, daß $p \in A_{n_1 n_2 \dots n_k}$ für $k = 1, 2, \dots$ 2. Wenn bei einer beliebigen unendlichen Folge natürlicher Zahlen n_1, n_2, \dots stets

$A_{n_1 n_2 \dots n_k} \neq \emptyset$ gilt für $k = 1, 2, \dots$, dann besteht die Menge $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n_1 n_2 \dots n_k}$ aus

einem einzigen Punkt. — Verf. zeigt an Hand des Beispiels des Fréchet'schen Raumes D_ω der reellen Zahlenfolgen, daß es auch nicht-separable Räume gibt, die im Sinne von Menger analytisch zu nennen sind. Beweis-Skizze: Jede natürliche Zahl k bestimmt eindeutig zwei natürliche Zahlen g_k, h_k , so daß $k = (2g_k - 1) 2^{h_k - 1}$. Ist daher n_1, n_2, \dots, n_k eine endliche Folge natürlicher Zahlen, so gibt es k Paare natürlicher Zahlen p, q , so daß $(2p - 1) 2^{q-1} \leq k$; als Menge $A_{n_1 n_2 \dots n_k}$ wird der Durchschnitt aller zu den Paaren p, q gehörigen Mengen $E(p, q, n_{(2p-1)2^{q-1}})$ erklärt; dabei ist, wenn p, q, r drei beliebige natürliche Zahlen sind, die Menge $E(p, q, r)$ definiert als die Gesamtheit aller Punkte (x_1, x_2, \dots) von D_ω , für welche gilt $[E(t)] = \text{größte ganze Zahl} \leq t$:

$$(-1)^r E\left(\frac{r}{2}\right) \cdot 2^{-q} \leq x_p \leq \left[(-1)^r E\left(\frac{r}{2}\right) + 1\right] \cdot 2^{-q}.$$

— Ist nun $a = (a_1, a_2, \dots)$ ein Punkt aus D_ω , dann setze man für $k = 1, 2, \dots$ $n_k = 2[E(2^{h_k} a_{g_k})] + \varphi(a_{g_k})$, wo $\varphi(x) = 1$ für $x \leq 0$ und $\varphi(x) = 0$ für $x > 0$; dann gilt $a \in A_{n_1 n_2 \dots n_k}$ für $k = 1, 2, \dots$, d. h. die erste der obengenannten Mengerschen Bedingungen ist erfüllt. — Das Erfülltsein der zweiten Bedingung beweist Verf. u. a. auf Grund der Bemerkung, daß jede Menge von abgeschlossenen Intervallen reeller Zahlen, die paarweise Punkte gemeinsam haben, einen nicht leeren Durchschnitt besitzt.

Neumer (Mainz).

Riabouchinsky, Dimitri: Le point euclidien et le point dimensionnel. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 885—887 (1948).

Riabouchinsky, Dimitri: Sur les antinomies de la théorie des ensembles. C. r. Acad. Sci., Paris, 227, 1315—1317 (1948).

Riabouchinsky, Dimitri: Les aspects philosophique et constructif de la théorie des nombres définis par leur valeur numérique et leur origine. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 405—408 (1949).

Fortsetzung der in dies. Zbl. 25, 309 und 29, 114 besprochenen Noten des Verf.

Differentiation und Integration reeller Funktionen:

Schaerf, H. M.: On the continuity of measurable functions in neighborhood spaces. *Portugaliae Math.* **6**, 33—44 (1947).

Es seien T ein topologischer Raum, in dem das zweite Abzählbarkeitsaxiom gilt, und R ein beliebiger Umgebungsraum, in dem ein additives System \mathfrak{S} von meßbar genannten Teilmengen ausgezeichnet ist; auf \mathfrak{S} sei ein Maß m definiert; $f(x)$ sei eine Abbildung einer Menge E von \mathfrak{S} in T , welche meßbar ist (d. h. das f^{-1} -Bild jeder offenen Menge aus T ist meßbar). Verf. gibt Bedingungen dafür an, daß a) für jedes positive ε eine meßbare Teilmenge E_ε von E existiert derart, daß $m(E - E_\varepsilon) < \varepsilon$ und $f(x)$ auf E_ε stetig ist, b) E_ε außerdem abgeschlossen gewählt werden kann (Lusinscher Satz). Für a) ist hinreichend, daß für jede meßbare Menge $E \subset R$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine meßbare, abgeschlossene Menge $F_\varepsilon \subset R$ existiert mit $m[(E - F_\varepsilon) \cup (F_\varepsilon - E)] < \varepsilon$; für b) ist notwendig und hinreichend, daß für jede meßbare Menge $E \subset R$ eine meßbare, abgeschlossene Menge $E_\varepsilon \subset E$ mit $m(E - E_\varepsilon) < \varepsilon$ existiert. Weiterhin wird eine hinreichende Bedingung für die gleichmäßige Stetigkeit von $f(x)$ auf E_ε angegeben. Schließlich wird als Anwendung dieser Bedingung die gleichmäßige Stetigkeit meßbarer Lösungen der Funktionalgleichung $f(xy) = f(x)f(y)$ bewiesen, wenn R und T topologische Gruppen sind und m gewissen Bedingungen genügt. *Nöbeling* (Erlangen).

Goffman, Casper: Proof of a theorem of Saks and Sierpiński. *Bull. Amer. math. Soc.* **54**, 950—952 (1948).

Es handelt sich um den Satz, wonach sich eine beliebige in einem abgeschlossenen Intervall definierte Funktion bis auf eine Argumentmenge vom Maße Null durch eine Funktion der zweiten Baireschen Klasse ε -approximieren läßt. Verf. gibt für dieses Theorem, das von S. Saks und W. Sierpiński [*Fundam. Math.*, Warszawa **11**, 105—112 (1928)] und H. Blumberg [*Acta math.*, Uppsala **65**, 277 (1935); dies. Zbl. **13**, 153] bewiesen wurde, eine neue direkte Herleitung. *Hadwiger* (Bern).

Tolstov, G. P.: Über ein Kurvenintegral im Lebesgueschen Sinne. *Mat. Sbornik*, n. S. **23**, 53—76 (1948) [Russisch].

In der Arbeit werden einige grundlegende Ergebnisse der komplexen Funktionentheorie auf Lebesguesche Integrale übertragen, die in den Sätzen gipfeln: Gegeben sei in einem Gebiet G der komplexen Ebene eine erreichbare Menge E , d. h. eine Punktmenge, die folgende Eigenschaft hat: es gibt eine konstante Zahl K , so daß für jedes achsenparallele Rechteck $R \subset G$ und für jedes gegebene Punktpaar A und B mit dem Abstand $\varrho(A, B)$ in R innerhalb R eine in bezug auf RE zugelassene Kurve existiert, die A und B verbindet und für die das lineare Maß $< K\varrho(A, B)$ ist. Dabei heißt eine in G verlaufende Kurve in bezug auf E zugelassen, wenn sie rektifizierbar ist und mit E nur eine Menge vom linearen Maß Null gemeinsam hat. Ist speziell E leer, so ist jede rektifizierbare, in G verlaufende Kurve zugelassen. Das Maß von E kann alle Werte von Null bis zum Maß von G annehmen.

— Dann gilt: 1. Wenn G ein Rechteck ist und für alle in bezug auf E zugelassenen geschlossenen Kurven C dieses Rechtecks $\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ gilt, so

genügt die eindeutige Funktion $F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy$ in G der Lipschitz-

bedingung. 2. (Eine Übertragung des Satzes von Morrer.) Falls die Funktion $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ der komplexen Veränderlichen $z = x + i y$ im Gebiet G meßbar ist und $\int_C f(z) dz = 0$ gilt für alle in bezug auf die gegebene Menge E , die eine Nullmenge sein soll, geschlossenen, in G verlaufenden Kurven C , so ist immer-

halb G $f(z)$ fast überall analytisch. — Die Beweise benutzen außer einigen grundlegenden Eigenschaften Lebesguescher Integrale im wesentlichen mengentheoretische Hilfsmittel. Es werden gewisse Funktionsklassen, von denen jede folgende in der vorherigen enthalten ist, definitionsmäßig vom ein- auf das zweidimensionale Gebiet übertragen, nämlich: Funktionen beschränkter Schwankung, totalstetige Funktionen und Funktionen, die der Lipschitzbedingung genügen. Dabei werden die üblichen Definitionen, die auf der Verwendung gewisser Intervallmengen beruhen, beibehalten, nur werden statt der Intervalle Kreise verwandt, deren Durchmesser entsprechenden Bedingungen unterworfen sind. Für diese Funktionsklassen gelten folgende Sätze: R enthalte eine erreichbare Menge E . Ist längs jeder zugelassenen Kurve eine Funktion $F(x, y)$ in R als Funktion der Bogenlänge von beschränkter Schwankung, so hat $F(x, y)$ in R nur hebbare Unstetigkeiten, und zwar an nicht mehr als abzählbar vielen Stellen. Ist darüber hinaus $F(x, y)$ noch stetig, so genügt $F(x, y)$ in R der Lipschitzbedingung. Ist $F(x, y)$ von beschränkter Schwankung, so auch längs jeder rektifizierbaren Kurve. Ist die Funktion $F(x, y)$ in R stetig längs jeder zugelassenen Kurve, so ist sie schlechtweg stetig in R . Für stetige Funktionen fallen alle drei oben genannten Funktionsklassen in eine zusammen. — Die Beweise dieser Sätze, auf denen die eingangs erwähnten Ergebnisse der Arbeit beruhen, werden wiederum vermitteltst weiterer Hilfssätze geführt, die die mengentheoretischen Eigenschaften der erreichbaren Mengen E betreffen.

Svenson (Heidelberg).

Dubrovskij, V. M.: Über gleichgradig summierbare Funktionen und die Eigenschaft der gleichmäßigen Additivität und gleichgradigen Stetigkeit einer Familie von vollständig additiven Mengenfunktionen. *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* 13, 341—356 (1949) [Russisch].

Verf. setzt eine Reihe früherer Untersuchungen über die Familien \mathfrak{M} vollständig additiver, endlicher Mengenfunktionen $\Phi_\alpha(e)$ mit einem Parameter α fort (dies. Zbl. 29, 115; 32, 197). Der Wertevorrat von α kann eine beliebige Mächtigkeit haben, und e ist ein Element einer Familie \mathfrak{M} von Untermengen einer vorgelegten Menge \mathfrak{A} irgendwelcher Elemente. Neben den früher besprochenen Eigenschaften der gleichmäßigen Additivität und der gleichgradigen Stetigkeit und dem Begriff einer Basis $M(e)$ der Familie \mathfrak{M} treten jetzt noch der Begriff der wesentlichen Teilbarkeit von \mathfrak{M} bezüglich $M(e)$, d. i. die Möglichkeit der Zerlegung jeder Menge e von \mathfrak{M} , für die $M(e) > 0$ ist, in zwei Teilmengen, so daß für beide $M(e) > 0$ ausfällt, und der Begriff einer gleichgradigen Summierbarkeit einer Funktion $f_\alpha(x)$, $x \in \mathfrak{A}$, die bezüglich \mathfrak{M} meßbar und bezüglich $\mu(e)$ summierbar ist, für die also das Integral $\int_{\mathfrak{B}} f_\alpha(x) \mu(d\mathfrak{A}_x)$ existiert für jeden in \mathfrak{M} enthaltenen Bereich \mathfrak{B} . $\mu(e)$ bedeutet dabei eine nicht negative, vollständig additive Mengenfunktion. $f_\alpha(x)$ heißt gleichgradig summierbar in bezug auf M , $\mu(e)$ und α , falls

$$\int_{e(N, \alpha)} [|f_\alpha(x)| - N] \mu(d\mathfrak{A}_x) \rightarrow 0 \text{ bei } N \rightarrow \infty$$

gleichmäßig in α , wo $e(N, \alpha)$ die Menge der Elemente $x \in \mathfrak{A}$ bedeutet, für die $|f_\alpha(x)| > N$ ist. Die Integrale sind wie alle weiteren im Lebesgue-Stieltjeschen Sinn zu verstehen. Die Basis $M(e)$ nennt Verf. auch ein Maß der Familie \mathfrak{M} und spricht von Nullmengen $e \in \mathfrak{M}$, wenn für e jedes Maß $M(e)$ der Familie \mathfrak{M} verschwindet. — Diese mengentheoretischen Eigenschaften der angegebenen Funktionen werden untersucht und auf mannigfache Art und Weise miteinander verknüpft. Insbesondere handelt es sich um die analytische Darstellung der Funktionen $\Phi_\alpha(e)$ durch Integrale: $\Phi_\alpha(e) = \int_e f_\alpha(x) M(d\mathfrak{A}_x)$, $e \in \mathfrak{M}$. Falls $\Phi_\alpha(e)$ gleichmäßig additiv und gleichmäßig beschränkt ist, ist diese Darstellung bei beliebiger Basis $M(e)$

stets möglich, und zwar vermitteltst einer gleichgradig summierbaren Funktion $f_\alpha(x)$. Darüber hinaus gilt der Äquivalenzsatz: Ist eine Familie \mathfrak{N} vollständig additiver Funktionen der Form $\Phi_\alpha(e) = \int_e f_\alpha(x) M(d\mathfrak{M}_e)$, $e \in \mathfrak{M}$, gegeben und ist \mathfrak{M} wesentlich teilbar bezüglich der Basis $M(e)$ oder irgendeiner anderen Basis der Familie \mathfrak{N} , so sind die Eigenschaften der gleichmäßigen Additivität oder der gleichgradigen Stetigkeit der Familie \mathfrak{N} äquivalent der gleichgradigen Summierbarkeit der entsprechenden Familie $f_\alpha(x)$. Ist \mathfrak{M} nicht wesentlich teilbar bezüglich irgendeiner Basis $M(e)$, so läßt sich eine bis auf eine Nullmenge eindeutige, nicht von der Wahl der Basis abhängige Zerlegung von \mathfrak{M} angeben, $\mathfrak{M} = \mathfrak{C} + (\mathfrak{M} - \mathfrak{C})$, so daß die Familie der zu $\mathfrak{M} - \mathfrak{C}$ gehörigen Mengen von \mathfrak{M} wesentlich teilbar bezüglich $M(e)$ ist und für sie, statt \mathfrak{M} , alles beim Alten bleibt, während \mathfrak{C} in eine endliche Anzahl von teilerfremden, bezüglich $M(e)$ nicht teilbaren Mengen zerfällt, für die $\Phi_\alpha(e)$ nicht beschränkt ausfällt. — Es folgen Anwendungen in der Theorie der Integralgleichungen, auf deren Möglichkeit in einem der oben zitierten Referate schon hingewiesen wurde. Sie gipfeln darin, daß die Äquivalenz folgender beiden Typen von Integralgleichungen

$$(A) \quad u(x) = f(x) + \lambda \int_{\mathfrak{M}} K(x, d\mathfrak{M}_y) u(y),$$

$$(B) \quad u(x) = f(x) + \lambda \int_{\mathfrak{M}} L(x, y) u(x) M(d\mathfrak{M}_y)$$

auf Grund obigen Äquivalenzsatzes und eines Hilfssatzes, der der Substitutionsformel einer neuen Veränderlichen im Gebiet der betrachteten Integrale entspricht, bewiesen wird, wenn die beiden Kerne $K(x, e)$ bzw. $L(x, y)$ den obigen Bedingungen der Anwendbarkeit des Äquivalenzsatzes entsprechen, wobei x die Rolle des Parameters α spielt und y die Rolle der früheren Integrationsvariablen x . Die Gleichung (A) enthält als Kern $K(x, e)$ eine kombinierte Funktion einer Zahl und einer Menge. Als Mengenfunktion bei festem x spielt er bei der Integration die Rolle des Maßes. Integralgleichungen von solchem Typus wurden insbesondere von Gunther untersucht. Die Gleichung (B) unterscheidet sich wenig von dem klassischen Fredholm'schen Typus und stellt nur eine Übertragung auf die Lebesgue-Stieltjessche Integralform dar. Nach Meinung des Verf. ist es zwar zweckmäßig, bei verschiedenen Untersuchungen fallweise die eine oder die andere Form zu benutzen, aber keine von ihnen ist vor der anderen bevorzugt. Svenson (Heidelberg).

Haupt, Otto: Zum Beweise des Lebesgueschen Ableitungssatzes. S.-B. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1948, 171—174 (1949).

\mathfrak{A} représente une σ -algèbre Booléenne d'ensembles avec unité E , m une \mathfrak{S}_0 -mesure complète finie ou dénombrablement infinie définie sur \mathfrak{A} , N un ensemble de mesure nulle. E est pourvu d'une base de dérivation \mathfrak{G} au sens suivant: Presque partout sur E sont associées à un point x des suites $g(x)$ (au sens de Moore-Smith) d'ensembles de \mathfrak{A} de mesure finie qui sont dites converger vers x ; toute sous-suite finale d'une suite convergeant vers x converge elle-même vers x . En outre le théorème fort de Vitali est supposé valide pour \mathfrak{G} [Cf. de Possel, J. Math. pur. appl., IX. S. 15, 391—409 (1936); ce Zbl. 15, 205]. Dans un article précédent l'A. et le réf. [Arch. Math., Karlsruhe 1, 23—28 (1948); ce Zbl. 30, 145] avaient introduit une propriété (U) pour \mathfrak{G} assurant l'existence presque partout de la dérivée de toute fonction (complètement) additive définie sur \mathfrak{A} et d'une propriété (E) qui jointe à (U) impliquait le théorème de dérivation de Lebesgue. Dans la présente note est énoncée une propriété plus faible que (U) et (E) impliquant pour \mathfrak{G} le théorème de dérivation de Lebesgue, à savoir (UE): Il existe dans \mathfrak{A} une $(\sigma \delta)$ -famille \mathfrak{D} , génératrice Borélienne de \mathfrak{A} (les opérations permises étant σ et δ) telle que pour $G \in \mathfrak{D}$ et $x \in G - N$, les ensembles de toute suite $g(x)$ soient à partir d'un certain index inclus dans G . Dans

le second paragraphe sont données deux propriétés (AE) et (N) assurant la mesurabilité des dérivées supérieure et inférieure par rapport à \mathfrak{G} de toute fonction finie définie sur la famille \mathfrak{B} des ensembles appartenant aux suites $\eta(x)$, à savoir (AE): Pour tout $I \in \mathfrak{B}$ et $x \in I$, il existe une suite $g(x)$ contenant I ; (N): La contraction d'une suite d'ensembles de \mathfrak{B} sur un point s'exprime par l'intermédiaire d'un scalaire tendant vers $+\infty$. [Cf. de Possel, C. r. Acad. Sci., Paris **201**, 579—581 (1935): ce Zbl. **12**, 252]. Dans le dernier paragraphe l'A. ayant analysé la démonstration d'un théorème fondamental de B. Jessen [Abstrakt Maal-og Integralteori, Kopenhagen 1947] sur les réseaux, donne deux propriétés garantissant la validité du théorème pour \mathfrak{G} . Chr. Pauc (Le Cap).

Obreškov, N.: Über das asymptotische Verhalten der Ableitungen einer reellen Funktion von einer reellen Veränderlichen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **67**, 225—228 (1949) [Russisch].

Bewiesen wird ohne spezielle Hilfsmittel folgender Satz: Es sei $f(x)$ eine reelle Funktion, die für $x > a$ die Ableitung n -ter Ordnung besitzt und für die $f(x) \sim A \varphi(x)$, $x \rightarrow \infty$, ($d. h. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A$) ist, wo $\varphi(x)$ eine Funktion regulären Wachstums bedeutet, also für jedes $\lambda > 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(\lambda x)}{\varphi(x)} = \lambda^m$ gilt bei festem m . Ist dann außerdem $\varphi(x)$ monoton und $f^{(n)}(x) > -M x^{-n} \varphi(x)$ mit $x > a$, $M > 0$, so zeigen alle Ableitungen von der ersten bis zur $(n-1)$ -ten Ordnung folgendes asymptotische Verhalten im Unendlichen:

$$f^{(i)}(x) \sim A m(m-1) \dots (m-i+1) x^{-i} \varphi(x);$$

ist dagegen $f^{(n)}(x)$ monoton, so besteht die entsprechende Formel für $f^{(n)}(x)$ selbst. Ein ganz entsprechendes Verhalten zeigen unendliche reelle Zahlenfolgen, wenn die Ableitungen durch entsprechende Differenzen verschiedener Ordnung der Zahlenfolge ersetzt werden. Speziell für Potenzfunktionen $f(x) = x^m$ ergeben sich hieraus bekannte Resultate von Hardy und Littlewood [Proc. London math. Soc., II. S. **11**, 417 (1913)], Landau [Rend. Circ. mat. Palermo **3** (1911)], Fujiwara [Tôhoku math. J. **15**, 323 (1919)] und Doetsch [Math. Z. **11**, 161 (1921) und Math. Ann., Berlin **82**, 68 (1921)]. Svenson (Heidelberg).

Jecklin, H.: Versuch einer Systematik des mathematischen Mittelwertbegriffs. Comment. math. Helvetici **22**, 260—270 (1949).

L'A. delinea un procedimento sistematico per determinare classi via via più ristrette di medie, il quale consiste nell'imporre a una funzione generalissima M di partenza di soddisfare a sempre nuove proprietà. La M è una funzione della forma $m = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ che goda della proprietà $m = a$ per $x_i = a$. Tutte le funzioni $y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ che non siano del tipo M a questo si riconducono se la $y = \varphi(m, m, \dots, m)$ è invertibile, perché dalla $m = \varphi(y)$ si ricava $m = \varphi[\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)]$ e quindi $m = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Dalle formule M si staccano le vere medie (interne) imponendo che f sia una funzione continua e monotona, tra queste si distingue poi la sottoclasse delle funzioni simmetriche, e così via. — Le funzioni M formano gruppo rispetto a due operazioni, dette dall'A. „dell'addizione“ e „della moltiplicazione dei quozienti“, che equivalgono alle operazioni di media aritmetica o geometrica ponderate. L'A. determina anche un „operatore“ che permetterebbe di esprimere la media aritmetica di una seriazione come media aritmetica ponderata del 1° e dell'ultimo termine, ma tale operatore ha valore solo formale perché risulta una funzione meno semplice di quella della media corrispondente. Castellano.

● **Rothe, R.:** Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure. Teil IV. Heft 5/6. Unter Mitwirkung von O. Degosang. — Übungsaufgaben und Lösungen zu Teil II. (Teubners Mathematische Leitfäden, Band 37/38). 3. Aufl. Leipzig: Verlagsgesellschaft B. G. Teubner 1949. 108 S. mit 59 Abb., karton. DM 3,60.

Allgemeine Reihenlehre:

Cassels, J. W. S.: An elementary proof of some inequalities. J. London math. Soc. **23**, 285—290 (1949).

1. Let $a_n \geq 0$ ($n = 0, 1, \dots$) be an infinite sequence and $k \geq 1$. Suppose that $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+1)^{k-2}$ is positive and finite and let $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Then $\int_0^1 F^k(x) dx \leq C S$ where $C = C(k) > 0$ depends only on k and is bounded except for $k \rightarrow \infty$. In the former proof of this inequality [Hardy and Littlewood, J. reine angew. Math. **157**, 141—158 (1927)] $C(k)$ tended to ∞ also for $k \rightarrow 1 + 0$. 2. Let $p > 1$, $q > 1$, $p' = p/(p-1)$, $q' = q/(q-1)$, $1/p + 1/q \geq 1$, $0 < \lambda = 2 - 1/p - 1/q \leq 1/p' + 1/q' \leq 1$ and $a_m \geq 0$, $b_n \geq 0$ ($m, n = 0, 1, \dots, l-1$). Suppose that

$\sum_{m=0}^{l-1} a_m^p = A > 0$, $\sum_{n=0}^{l-1} b_n^q = B > 0$. Then $\sum_{m,n=0}^{l-1} \frac{a_m b_n}{(m+n+1)^\lambda} < F A^{1/p} B^{1/q}$, where

$$F = \left\{ \int_0^{2l} \frac{x^{-1/\lambda p'}}{1+x} dx \right\}^{1/q'} \left\{ \int_0^{2l} \frac{x^{-1/\lambda q'}}{1+x} dx \right\}^{1/p'}$$

This is a generalization of Hilbert's double series theorem [Hardy, Littlewood, Polya, Inequalities, Ch. IX]. Horváth (Paris).

Knopp, K.: Beweis eines von I. Schur in der Theorie der C-Summierbarkeit aufgestellten Satzes. J. reine angew. Math. **187**, 70—74 (1949).

Bezeichne C_l ($0 \leq l$) das l -te Cesàrosche Summierungsverfahren. Die Faktorenfolge $\{b_p\}$ heißt vom Typus (C_l, C_k) , wenn die Reihe $\sum_1^\infty a_p b_p$ für alle C_l -summierbaren $\sum_1^\infty a_p$ C_k -summierbar ist. $\{b_p\}$ heißt vom Typus (C'_l, C_k) , wenn $\sum_1^\infty a_p b_p$ für alle C_l -beschränkten $\sum_1^\infty a_p$ C_k -summierbar ist. Verf. beweist den folgenden Satz: 1. Die Folge $\{b_p\}$ ist dann und nur dann vom Typus (C_l, C_k) ($0 \leq k \leq l$, k reell, l ganz), wenn $b_p = O(p^{k-l})$ und $\sum_1^\infty p^l |\Delta^{l+1} b_p| < \infty$ ist. 2. $\{b_p\}$ ist dann und nur

dann vom Typus (C'_l, C_k) , wenn $b_p = o(p^{k-l})$ und $\sum_1^\infty p^l |\Delta^{l+1} b_p| < \infty$ ist. 3. Für alle $0 \leq l < k$ sind die Bedingungen die gleichen wie für $k = l$. Der Satz stammt von I. Schur, der den Spezialfall $k, l = \text{ganz}$, ohne Beweis mitgeteilt hat [J. reine angew. Math. **151**, 79—111 (1921)]. Verf. bemerkt, daß L. S. Bosanquet den Satz neuerdings auf reelle k und l verallgemeinert hat (dies. Zbl. **32**, 404; s. a. dies. Zbl. **30**, 248).

— Die Beweisskizze ist die folgende: Sei $s_n = \sum_1^n a_p$ und $t_n = \sum_1^n a_p b_p$, sei weiterhin $\sigma_n = C_l(n, s_p)$ und $\tau_n = C_k(n, t_p)$. Verf. drückt τ_p durch σ_n in der Form einer Matrixtransformation $\tau_n = \sum_{p=1}^\infty a_{np} \sigma_p$ aus. Das Problem ist so auf die Frage der Konvergenztreue von (a_{np}) zurückgeführt. Die Hauptschwierigkeit liegt im Beweis der Ungleichung $\sum_{p=1}^\infty |a_{np}| \leq M$. Für diesen Zweck benutzt Verf. einen für ganze l gültigen Hilfssatz von A. F. Andersen [Studier over Summabilitetsmethode, Kopenhagen 1921]. Der Beweis von 3. ist auf die Methode der „schnell-wachsenden Reihen“ gegründet. Gál (Paris).

Macphail, M. S.: On Perron's extension of the Euler-Knopp summation method. Trans. R. Soc. Canada, Sect. III, **42**, 43—49 (1948).

Anknüpfend einerseits an O. Perron [Math. Z. **18**, 157—172 (1923)], andererseits an R. P. Agnew [Amer. J. Math. **66**, 313—338 (1944)] behandelt Verf. die

Verallgemeinerung der Euler-Knopp'schen Reihentransformation, die sich ergibt, wenn von einer Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mittels einer Funktion $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+1}$ zu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n [f(t)]^{n+1}$ übergegangen, diese neue Reihe nach Potenzen von t in $\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^{n+1}$ umgeordnet und dann $t = 1$ gesetzt wird. Die so entstehende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ wird die „ f -Transformation“ von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ genannt. Ist sie konvergent zur Summe S ,

so heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ „ f -summierbar“ zur Summe S . O. Perron hat gezeigt, daß das durch $f(t)$ erzeugte Summierungsverfahren permanent ist, falls $f(t)$ den Bedingungen genügt: (a) $c_n \geq 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). (b) $f(1) = 1$. Er hat für seine Untersuchungen weiter verlangt: (c) Der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+1}$ ist größer als 1 und $z = f(t)$ bildet den Kreis $|t| = 1$ in eine einfach geschlossene Kurve J ab, die von jedem vom Nullpunkt auslaufenden Halbstrahl nur in einem einzigen Punkt geschnitten wird. — In der vorliegenden Note wird auf die Voraussetzung (a) verzichtet, dafür aber zusätzlich gefordert: (d) Die Kurve J verläuft an der Stelle $z = 1$ nicht tangential an die reelle Achse. Unter den Voraussetzungen (b), (c), (d) beweist Verf. einige Eigenschaften der f -Transformationen. Er zeigt insbesondere, daß die auf denselben beruhenden Summierungsverfahren miteinander (also speziell auch mit der gewöhnlichen Konvergenz) verträglich sind, da aus der f -Summierbarkeit einer Reihe zur Summe S stets ihre A -Summierbarkeit zur Summe S folgt. *Friedrich Lösch.*

Hartman, Philip: Tauber's theorem and absolute constants. Amer. J. Math. 69, 599—606 (1947).

Es sei $0 < r < 1$, $F(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n$, a_n reell; $N(r) = [-1/\log r]$. A. Wintner [Comment. math. Helvetici 20, 216—222 (1947)] wies nach, daß zwei beste absolute Konstante τ und τ^* existieren, so daß

$$(1) \quad \limsup_{r \rightarrow 1-0} \left| F(r) - \sum_{n=1}^{N(r)} a_n \right| \leq \tau \limsup_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \left| \sum_{k=1}^n k a_k \right|,$$

$$(2) \quad \limsup_{r \rightarrow 1-0} \left| F(r) - \sum_{n=1}^{N(r)} a_n \right| \leq \tau^* \limsup_{n \rightarrow \infty} n |a_n|$$

gilt. Verf. ermittelt die genauen Werte dieser Konstanten und findet

$$\tau = C + 2B + 2/e = 1,75174 \dots, \quad \tau^* = C + 2B = 1,01598 \dots$$

wobei C die Eulersche Konstante und $B = \int_1^{\infty} x^{-1} e^{-x} dx$ bedeutet. Eine Bemerkung des Verf., wonach $\tau^* = \varrho$ sei, falls ϱ die vom Ref. (dies. Zbl. 28, 391) eingeführte Konstante bezeichnet, trifft deshalb nicht zu, weil bei der Definition von ϱ die Anzahlfunktion $N(r)$ nicht vorgegeben ist, sondern so gewählt werden soll, daß die linksstehende Schranke in (2) möglichst klein ausfällt. Wie dies bereits durch R. P. Agnew gezeigt wurde, trifft dies für $N(r) = [-\log 2/\log r]$ zu, und die zugehörige kleinere Konstante hat den Wert $\varrho = 0,96804 \dots$. Vgl. auch einen neueren Bericht von R. P. Agnew (dies. Zbl. 32, 152). *H. Hadwiger (Bern).*

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Bernštejn (Bernstein), S. N.: Über die Rolle von Ungleichungen und Extremalproblemen in der mathematischen Analysis. Akad. Nauk SSSR, Jubil. Sbornik 1, 114—133 (1947) [Russisch].

Verf. gibt einen kurz gehaltenen Überblick über die Entwicklung einiger wichtigen Zweige der Analysis, angefangen vom 17. Jahrhundert bis zur Gegenwart. Der leitende Gedanke ist

dabei die Hervorhebung der Bedeutung gewisser extremaler Ungleichungen und extremaler Eigenschaften der Funktionen, die sich vielfach als grundlegend für die Gesamtschau und als fruchtbare Richtlinien für die Fortentwicklung erwiesen haben. Diese Art extremaler Aussagen treten erstmalig in Cauchys Majorantenmethode zum Existenzbeweis der Lösung von Differentialgleichungen auf, dann in Poincarés Methode der Lösung von Differentialgleichungssystemen, die der Störungsrechnung der Himmelsmechanik entstammt, greifen dann in die komplexe Funktionentheorie über in Form von Sätzen über Schranken für die absoluten Beträge der Ableitungen beliebig hoher Ordnung regulärer Funktionen, die nur für Polynome erreicht werden, und spielen in vielen anderen Disziplinen eine wichtige Rolle, so auch in der Variationsrechnung bei der Aussage der Analytizität der Extremalen eines beliebigen Variationsproblems. Nach Ansicht des Verf., die er schon früher vertreten hat, stellt die Beschränktheit der aufeinander folgenden partiellen Ableitungen darüber hinaus durch Ermöglichung der Anwendung der Parametermethode zur Lösung den wesentlichen Kern der ersten (und auch weiterer) Randwertaufgaben für eine beliebige Differentialgleichung von elliptischem Typus dar. — Sodann wendet sich Verf. der grundlegenden Bedeutung einer neuen, gegenwärtig von den russischen Mathematikern bevorzugten mathematischen Forschungsrichtung zu, die von Tschebyscheff begründet ist. Sie vereinigt alle Theorien von Funktionen auf der Basis ihrer Annäherung durch irgendwelche Systeme einfacherer Funktionen, wobei die Annäherung gemäß irgendeiner Vorschrift möglichst gut sein soll. Dadurch tut sich der extremale Charakter dieser Richtung kund. Als Maß für die Güte der Annäherung kann z. B. die kleinste Abweichung des Annäherungsaggregates n -ter Ordnung von der Funktion $f(x)$ in einem gegebenen Intervall $\langle a, b \rangle$ dienen, $E_n(f(x); a, b)$, oder die mittlere quadratische Abweichung daselbst, $I_n(f(x); a, b)$. Voraus geht, im Falle, daß als Annäherungsfunktionen Polynome verwendet werden, eine weitgehende Untersuchung der Extremaleigenschaften der Polynome selbst im reellen Gebiet. Entsprechendes gilt, falls andere Funktionen als Näherungsfunktionen dienen. Die auf diesem Fundament aufgebaute Theorie führt zu einer neuartigen Kennzeichnung umfassender Funktionsklassen durch die Art des Abnahmegesetzes obiger Ausdrücke E_n oder I_n zu Null bei $n \rightarrow \infty$, das die Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften der Funktionen weitgehend beherrscht und gliedert, wobei aber die Benutzung von I_n naturgemäß weniger detaillierte Resultate ergibt (sowie auch zu Konstruktionsmethoden der Bildung von Funktionen mit vorgegebenem Verhalten gegenüber E_n oder I_n): Polynome, in einem endlichen Intervall stetige Funktionen, analytische Funktionen (das Prinzip der analytischen Fortsetzung wird hier ohne Zuhilfenahme der Funktionentheorie erschlossen), gewisse Klassen nicht stetiger oder nicht analytischer Funktionen bei Verwendung von Polynomen als Annäherungsfunktionen; periodische Funktionen, fastperiodische Funktionen bei Verwendung von trigonometrischen Funktionen; für unbeschränkten Definitionsbereich der unabhängigen Veränderlichen gleichmäßig stetige und beschränkte Funktionen (wie sie z. B. in der reellen Theorie von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen, insbesondere bei Problemen der Mechanik, eine Rolle spielen) bei Verwendung von beschränkten ganzen Funktionen von endlichem Grade p [die selbst durch eine extremale Eigenschaft definiert werden können: wenn $f(x)$ zu dieser Klasse gehört, wobei $|f(x)| \leq M$ ist, so gehört auch $f'(x)$ dazu mit $|f'(x)| \leq Mp$ für unbeschränktes x ; das Gleichheitszeichen gilt nur für $\cos p(a-x)$]. Die Theorie der Annäherung durch die zuletzt angegebenen Funktionen erweist sich dabei als eine natürliche Verallgemeinerung und Fortsetzung der entsprechenden Theorien vermöge der Polynome und der trigonometrischen Funktionen. — Viele Resultate tiefliegender Untersuchungen des vorigen Jahrhunderts über die Entwicklungen von Funktionen in trigonometrische Reihen oder Reihen von orthogonalen Funktionssystemen gehen in der neuen Theorie auf und erhalten von hier aus einen Impuls zur Weiterentwicklung. Mit der Angabe bisher ungelöster Fragestellungen aus diesem Problembereich schließt die fesselnd geschriebene Arbeit. *Svenson.*

Agmon, Shmul: Sur un problème de translations. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 540—542 (1949).

Es sei $K_0(x)$ eine Funktion aus $L^p(0, 1)$, $1 \leq p < \infty$, derart, daß $\int_0^\delta |K_0(x)| dx > 0$ für jedes $0 < \delta < 1$. Es werde gesetzt: $K_0(x) = 0$ für $-\infty < x < 0$ und $1 < x < \infty$. Es sei $\{\xi_n\}$ eine in $[0, 1]$ überall dichte Zahlenfolge. Dann ist die Folge der Funktionen $K_0(x - \xi_n)$ vollständig im Raum $L^p(0, 1)$, d. h. zu jeder Funktion $K(x)$ aus $L^p(0, 1)$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein N und Konstante a_1, \dots, a_N derart, daß $\int_0^1 |K(x) - \sum_{n=1}^N a_n K_0(x - \xi_n)|^p dx < \varepsilon$. *Doetsch* (Freiburg i. Br.).

Zamansky, M.: Classes de saturation de certains procédés d'approximation des séries de Fourier des fonctions continues et applications à quelques problèmes d'approximation. Ann. sci. École norm. sup., III. S. 66, 19—93 (1949).

La première partie du travail est consacrée à la majoration des dérivées d'une suite de polynômes tendant uniformément vers une fonction continue. Le résultat fondamental est le suivant: Soient $f(x)$ une fonction continue, $P_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) une suite de polynômes trigonométriques, $P_n(x)$ étant d'ordre n , k un entier > 0 et $\varphi(t) > 0$ une fonction décroissante. Si $|P_n(x) - f(x)| < \varphi(n) n^{1-k}$ alors

$$|P_n^{(k)}(x)| < A + B n \varphi(n) + C \int_1^n \varphi(t) dt \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \text{où } A, B, C \text{ sont des}$$

constantes. En particulier si $|P_n - f| = O(1/n)$, $|P_n''| = O(n)$ et ce résultat ne peut pas être amélioré, comme le montre l'exemple $f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} (\sin p x)/p^2$.

$P_n(x) = \sum_{p=1}^n (\sin p x)/p^2$. Nombreux autres résultats sont donnés dans cette même direction. — Dans la deuxième partie l'A. donne pour plusieurs procédés de sommation de la série de Fourier la solution du problème de saturation, posé par J. Favard. $a_0/2 + \sum a_k \cos kx + b_k \sin kx$ étant la série de Fourier d'une fonction continue, soit $\gamma = (\gamma_k^n)$ une matrice de Toeplitz triangulaire et

$$P_n(x; f, \gamma) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \gamma_k^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

S'il existe une fonction $\varphi(n) \downarrow 0$ telle que $|f(x) - P_n(x; f, \gamma)| = o(\varphi(n))$ implique $f(x) \equiv \text{const.}$, mais qu'il existe des fonctions non constantes telles que $|f(x) - P_n(x; f, \gamma)| = O(\varphi(n))$, alors on dit que le procédé défini par γ se sature pour la fonction $\varphi(n)$. La classe des fonctions qui admettent l'approximation d'ordre $O(\varphi(n))$ est appelée la classe de saturation du procédé γ . Le procédé de Fejér se sature avec l'approximation d'ordre $O(1/n)$ et la classe de saturation est caractérisée par le théorème que voici [σ_n désignant la n -ième somme de Fejér, $f^*(x)$ la fonction conjuguée de $f(x)$]: Les trois énoncés suivants sont équivalents: 1. $|f - \sigma_n| = O(1/n)$, 2. $f \in \text{Lip } 1$, 3. en posant $A_2(t) = f(x+t) -$

$2f(x) + f(x-t)$, l'expression $\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{A_2(t)}{t^2} dt$ est uniformément bornée en x et ε .

L'équivalence de 1. et de 2. est un résultat connu de Alexits [Mat. fiz. Lapok 48, 410—422 (1941); ce Zbl. 26, 310], celui de 1. et de 3. résulte du théorème plus précis suivant: Si la meilleure approximation trigonométrique $E_n(f)$ d'une fonction continue $f(x)$ est $O(1/n)$, alors

$$\left| \sigma_n(x) - f(x) - \frac{1}{2n\pi} \int_{\alpha/n}^{\infty} \frac{A_2(2t)}{t^2} dt \right| < \lambda' \frac{A}{n},$$

où α est une constante indépendante de n , et λ une constante dépendante de α . L'A. donne aussi une nouvelle démonstration du théorème de Zygmund [Duke math. J. 12, 47—76 (1945)] selon lequel $E_n(f) = O(1/n)$ resp. $o(1/n)$, si et seulement si $|A_2(t)/t| = O(1)$ resp. $o(1)$ pour $t \rightarrow 0$ uniformément en x . Les procédés de sommation de Cesàro d'ordre entier seaturent avec la même approximation et possèdent la même classe de saturation que le procédé de Fejér. Le procédé de Jackson-de La Vallée Poussin seature avec l'approximation $O(1/n^2)$ et la classe de saturation est caractérisée par l'équivalence des énoncés suivants: a) $|f - J_{2n}| = O(1/n^2)$,

b) $f'(x)$ existe et $\in \text{Lip } 1$, c) l'expression $\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{A_2(t)}{t^2} dt$ est uniformément bornée

en x et ε . — Désignons par $A_{2p}(t)$ la différence d'ordre $2p$ de $f(x)$ aux points $x-t, x-t/2, \dots, x-t/2^{p-1}, x, x+t/2^{p-1}, \dots, x+t/2, x+t$. L'expression

$\frac{A_p}{n^{2p-1}} \int_0^{\infty} \frac{A_{2p}(2t)}{t^{2p}} \sin^{2p} nt dt$ ($A_p = \text{Const.}$) représente la différence entre $f(x)$ et

un polynome trigonométrique $T_{2^{p-1}pn}$ d'ordre $2^{p-1}pn$ (pour $p=1$ celui n'est autre que la somme de Fejér). Ce procédé d'approximation se sature avec l'ordre

$O(1/n^{2p-1})$ et $|f - T_{2^p pn}| = O(1/n^{2p-1})$ si et seulement si $\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{A_{2^p t}(t)}{t^{2p}} dt$ est borné

uniformément en x et ε . Pour que $E_n(f) = O(1/n^{2p-1})$, il faut et il suffit que l'une

des quantités $\varepsilon^{1-2p} A_{2^p}(\varepsilon)$, $\varepsilon^{2m} \int_0^{\infty} \frac{A_{2^p t}(t)}{t^{2p+2m}} dt$ ($m=1, 2, \dots$) soit uniformément

bornée en x et ε . L'A. donne une nouvelle démonstration du théorème selon lequel si $f(x)$ possède une dérivée $f^{(k)} \in \text{Lip } \alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$), alors $E_n(f) = O(1/n^{k+\alpha})$. —

Le troisième chapitre expose des applications à divers problèmes d'approximation et aux séries de Fourier. Citons un résultat à titre d'exemple. $S_n(x)$ désignant la n -ième somme de Fourier de $f(x)$ continue, si $S'_n(x) = o(n)$ pour $n \rightarrow \infty$, la condition nécessaire et suffisante, pour qu'au point x la série conjuguée converge,

est que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi/2} [f(x+2t) - f(x-2t)] \cotg t dt$ existe et la série conjuguée a alors

pour somme cette limite. Notons l'analogie avec un résultat classique de Young [cf. Zygmund: Trigonometrical series, p. 26]. Horváth (Paris).

Bohman, H.: On a class of orthogonal series. Ark. Mat., Stockholm **1**, 13—19 (1949).

Rademacher [Math. Ann., Berlin **87**, 112—138 (1922)] verdankt man den Satz, daß die Fourierreihe einer Funktion $f(x)$ bezüglich eines Orthogonalsystems $q_n(x) \in L^2(1)$ $\sum a_n q_n(x)$ fast überall (f. ü.) konvergiert, wenn (2) $\sum a_n^2 (\log n)^2 = O(1)$. Diese Bedingung kann im allgemeinen nicht verschärft werden. Will man also dasselbe schon für (3) $\sum a_n^2 = O(1)$ aussagen, dann sind speziellere Voraussetzungen über $q_n(x)$ nötig. Auf Kolmogoroff geht der Satz zurück, daß (3) notwendig und hinreichend für die Konvergenz f. ü. von (1) ist, wenn q_n ein System unabhängiger zufälliger Variabler ist [Math. Ann., Berlin **99**, 309—319 (1928); **102**, 484—488 (1930)]. Vgl. auch Steinhaus. Studia math. Lwów **2**, 21—39 (1930); Math. Z. **31**, 408—416 (1930). Die Betrachtungen des Verf. beruhen wesentlich auf der bekannten Arbeit von Jessen [Acta math., Uppsala **63**, 249—323 (1934); dies. Zbl. **10**, 200] über die Integrationstheorie im Torusraum Q_ω . Es wird gezeigt: $q_n(\xi)$ sei ein normiertes Orthogonalsystem in Q_ω , so daß für alle n $q_n(\xi) = q_n(x_n)$. Dann konvergiert $\sum a_n q_n(x_n)$ f. ü. in Q_ω , wenn (3) gilt und divergiert f. ü., wenn dies nicht der Fall ist. — Ausgehend von den $q_n(x_n)$ wird ein weiteres normiertes Orthogonalsystem $\psi_n(\xi)$ konstruiert, so wie man z. B. aus dem Rademacherschen das Walshsche System erhält. Für irgendein meßbares $\varphi(x)$ sei, wie üblich, $F(t) = m E[\varphi(x) \geq t]$ die Verteilungsfunktion von φ . Dann gilt: Falls alle $q_n(x_n)$ stetige Verteilungsfunktionen besitzen, ist $\sum a_n \psi_n(\xi)$ entweder konvergent f. ü. oder divergent f. ü. — $\psi_n^{(k)}$ sei jene Teilmenge aus den ψ_n , welche dadurch charakterisiert ist, daß jedes $\psi_n^{(k)}$ gemäß seiner Konstruktion genau aus k Faktoren gebildet ist ($k=1, 2, \dots$). Dann ist $\sum a_n \psi_n^{(k)}$ konvergent f. ü. für jedes feste k , falls (3) gilt. Schmetterer (Wien).

Alexits, Georges: Sur la convergence d'une classe de séries orthonormales. Acta Univ. Szeged., Acta Sci. math. **13**, 18—20 (1949).

Le rapporteur a communiqué à l'A. qu'il peut étendre au cas $\gamma=0$ un des ses théorèmes, valable pour les valeurs >0 d'un certain paramètre γ [pour le cas $\gamma>0$ voir I. S. Gál, C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 636—638 (1949)]. Cette extension est inexacte, donc (par la faute du rapporteur) l'A. donne une démonstration fautive du théorème suivant: Si $|c_n| \geq |c_{n+1}|$ et $c_n = O\left(\sqrt[n]{n (\log n)^{1+\varepsilon}}\right)^{-1}$ alors $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ converge presque partout. Je crois que le résultat n'est même pas vrai en général

et que l'exemple de D. Menchoff [Fundam. Math., Warszawa 4, 82—105 (1923)] fournirait une réalisation de l'hypothèse $|c_n| \geq |c_{n+1}|$. Gál (Paris).

Malliavin, Paul: Sur la convergence absolue des séries trigonométriques. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1467—1469 (1949).

Es sei P eine im Sinne von R. Salem [Bull. Amer. math. Soc. 47, 821—828 (1941)] symmetrische perfekte Punktmenge, d. h. für eine Folge positiver Zahlen

r_1, r_2, \dots mit $r_n > \sum_{p=n+1}^{\infty} r_p$ sei die Punkte $x \in P$ in der Form $x = \varepsilon_1 r_1 + \varepsilon_2 r_2 + \dots$

mit $\varepsilon_n = 0, 1$ darstellbar. Verf. zeigt: Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n |\sin nx|$ mit $\varrho_n > 0$ auf P konvergent, so ist sie dort gleichmäßig konvergent. Friedrich Lösch.

Wolf, František: Contributions to a theory of summability of trigonometric integrals. Univ. California Publ. Math., n. S. 1, 159—228 (1947).

Die Analogie zwischen trigonometrischen Integralen

$$\int_0^{\infty} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda$$

und trigonometrischen Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ ist bekannt, und die meisten Sätze und Beweise für Integrale sind denen für Reihen nachgebildet. Jedoch mußten die Beweise für Integrale immer selbständig geführt werden, ohne die Resultate für Reihen unmittelbar zu benutzen. Verf. setzt sich das Ziel, Theoreme aufzustellen, vermittels deren Sätze über Reihen unmittelbar auf Integrale übertragen werden können. Ein typisches Beispiel ist das folgende. Verf. beweist den Satz: Wenn das Integral in einer Menge von positivem Maß konvergiert, so gibt es eine Reihe mit $a_n, b_n \rightarrow 0$ derart, daß

$$(1) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{\omega} [a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda - \sum_0^{\omega} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right\} = 0,$$

$$(2) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{\omega} [-a(\lambda) \sin \lambda x + b(\lambda) \cos \lambda x] d\lambda - \sum_0^{\omega} (-a_n \sin nx + b_n \cos nx) \right\} = 0$$

gleichmäßig in jedem Intervall $< 2\pi$. Nun gilt bekanntlich folgender Satz: Wenn eine trigonometrische Reihe in einer Menge E von positivem Maß konvergiert, so

konvergiert die konjugierte Reihe $\sum_1^{\infty} (-a_n \sin nx + b_n \cos nx)$ fast überall in E .

Der entsprechende Satz für Integrale ergibt sich nun sofort folgendermaßen: Wenn das Integral in E konvergiert, so konvergiert die Reihe wegen (1) ebenfalls in E . Nach dem Satz über Reihen konvergiert die konjugierte Reihe fast überall in E , also wegen (2) auch das konjugierte Integral. — Das obige Programm wird nun, über den Begriff der gewöhnlichen Konvergenz hinausgreifend, gleich im Rahmen der Cesàroschen Summabilität durchgeführt, wobei die Cesàroschen Mittel in einer Form geschrieben werden, die alle bisherigen Verallgemeinerungen wie Stieltjes-Integrale usw. umfaßt. Die umfangreiche Arbeit ist in 7 Kapitel gegliedert. Das erste beweist eine Reihe von Hilfssätzen, das zweite gibt die Theorie der verallgemeinerten Integrale, die bei der erwähnten Form der Cesàroschen Mittel verwendet werden. Das dritte bildet den Kern der Arbeit und beweist zwei grundlegende „Äquissummabilitäts-Theoreme“, welche die Cesàroschen Mittel von Integralen und Reihen in Beziehung zu setzen gestatten. Die übrigen Kapitel behandeln Anwendungen und weitere Ausgestaltungen der Methode. Doetsch (Freiburg i. Br.).

Spezielle Orthogonalfunktionen:

Sansone, Giovanni: Su una disuguaglianza di P. Turán relativa ai polinomi di Legendre. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 4, 221—223 (1949).

The inequality in the title states that

$$(1) \quad \Delta_n(x) \equiv P_n(x)^2 - P_{n-1}(x) P_{n+1}(x) \geq 0, \quad n \geq 1, -1 \leq x \leq 1$$

where $P_\nu(x)$ denotes the ν^{th} polynomial of Legendre. Author improves (1) by showing

$$(2) \quad \Delta_n(0) + \frac{P_n(0)^2 - P_n(x)^2}{2n(n+1)} > \Delta_n(x) > \frac{1 - P_n(x)^2}{2n(n+1)} (> 0).$$

The similar inequality

$$(3) \quad \frac{2n+1}{3n(n+1)} \geq \Delta_n(x) \geq \frac{1 - P_n(x)^2}{(2n-1)(n+1)}$$

as well as similar inequalities for ultraspherical polynomials has been proved by O. Szász (communicated to the reviewer in a letter of 3. June 1949). *Turán.*

Sansone, G.: Su una disuguaglianza relativa ai polinomi di Legendre. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 4, 339—341 (1949).

With the notation of the preceding review the main result of the author is that $\Delta_n(x)$ is monotonically decreasing for $x > 1$. Beckenbach showed [prelim. report in Bull. Amer. math. Soc. 55, 41 (1949)] that $\Delta_n(x)$ is convex from above for all real x -values. Owing to $\Delta_n(\pm 1) = 0$ this contains the inequality in the title as well as the above result of the author and a lemma of the reviewer in a forthcoming paper in the Časopis Mat. Fysiky, Praha about the distribution of zeros of Legendre-polynomials. *Turán* (Budapest).

Gatteschi, Luigi: Una formula asintotica per l'approssimazione degli zeri dei polinomi di Legendre. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 4, 240—250 (1949).

Im Anschluß an eine Untersuchung von Tricomi [Ann. Mat. pura appl. IV. S. 26, 283—300 (1947)] gibt Verf. für die r -te Nullstelle ξ_r des n -ten Legendreschen Polynoms die Formel

$$\xi_r = \cos \frac{4r-1}{4n+2} \pi \cdot \left[1 - \frac{2n+7}{2(2n+1)(2n+3)(2n+5)} \right] + \varepsilon, \\ \left[\frac{n+2}{6} \right] + 1 \leq r \leq \left[\frac{n}{2} \right]; \quad |\varepsilon| < \frac{54}{10n^4},$$

die etwas besser ist als die bisher bekannten. [$\varepsilon = O(n^{-4})$ ist bekannt.] Der Beweis fußt auf einer von Stieltjes [Ann. Fac. Sci. Toulouse 4, 1—17 (1890)] stammenden asymptotischen Entwicklung, deren erste Glieder mit Hilfe des Taylorschen Satzes genauer abgeschätzt werden. *W. Hahn* (Berlin).

Salzer, Herbert E. and Ruth Zucker: Table of the zeros and weight factors of the first fifteen Laguerre polynomials. Bull. Amer. math. Soc. 55, 1004—1012 (1949).

Bezeichnet man mit $x_{i,n}$ die Nullstellen des n -ten Laguerreschen Polynoms $L_n(x) = e^x d^n/(e^{-x} x^n) dx^n$, mit $\alpha_{i,n}$ die Gewichtungsfaktoren (Christoffelschen Zahlen)

$$\alpha_{i,n} = \frac{1}{L'_n(x_{i,n})} \int_0^\infty \frac{e^{-x} L_n(x)}{x - x_{i,n}} dx,$$

so gilt bekanntlich die Quadraturformel

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x) dx \sim \sum_{i=1}^n \alpha_{i,n} f(x_{i,n}).$$

[Ist $f(x)$ ein Polynom $(2n-1)$ -ten Grades, so gilt sie genau.] Verf. haben die für die praktische Verwendung der Formel wichtigen Konstanten berechnet und tabelliert, und zwar die Zahlen $x_{i,n}, \alpha_{i,n}, \alpha_{i,n} e^{x_{i,n}}$ für die ersten 15 Polynome auf 12 Stellen genau. *W. Hahn* (Berlin).

Lebedev, N. N.: Über die Zerlegung einer willkürlichen Funktion in ein Integral nach Zylinderfunktionen von imaginärem Index und Argument. Priklad. Mat. Mech., Moskva 13, 465—476 (1949) [Russisch].

Sei $K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \nu \pi}$ Macdonalds Funktion. Dann gilt, wie Verf. gezeigt hat [vgl. z. B. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 52, 655—658 (1946); vgl. auch dies. Zbl. 30, 125], die Darstellung

$$(1) \quad f(x) = \frac{2}{x^2 \pi} \int_0^\infty K_{i\tau}(x) \tau \operatorname{Sin} \pi \tau F(\tau) d\tau \quad \text{mit} \quad F(\tau) = \int_0^\infty f(\xi) K_{i\tau}(\xi) d\xi, \quad x > 0,$$

wenn $f(x)$ und $f'(x)$ beschränkt und stetig in $(0, \infty)$ sind, sowie $x^2 f(x) \in L(0, \infty)$ und $x f'(x) \in L(0, \infty)$ gelten. — Vorliegende Arbeit stellt sich das Ziel, die Darstellung (1), welche eine Reihe von physikalischen Anwendungen gestattet, unter viel allgemeineren Voraussetzungen sicherzustellen. Es wird der nicht ganz einfach zu beweisende Satz gezeigt: $f(x)$ sei in irgendeinem endlichen Intervall (a, b) von beschränkter Schwankung, $f(x) \log x \in L(0, \frac{1}{2})$ und $f(x) \sqrt{x} \in L(\frac{1}{2}, \infty)$. Dann gilt in (a, b) (1) an jeder Stetigkeitsstelle von $f(x)$, und allgemeiner ist $f(x)$ durch $\frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0))$ zu ersetzen. Die für den Beweis erforderliche Untersuchung des Limes für $T \rightarrow \infty$ des Ausdruckes

$$(2) \quad \frac{2}{x \pi^2} \int_0^T K_{i\tau}(x) \tau \operatorname{Sin} \pi \tau d\tau \int_0^\infty f(\xi) K_{i\tau}(\xi) d\xi$$

benötigt eine Integraldarstellung des Kernes $K_{i\tau}(x) K_{i\tau}(x e^{\theta}) \operatorname{Sin} \pi \tau$ (Transformation $\xi = x e^{\theta}$), bezüglich welcher Verf. auf die Arbeiten von Dixon und Ferrar, Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 4, 193—208, 297—304 (1933); dies. Zbl. 7, 412 und 8, 211 verweist. (2) wird nun in zwei Summanden zerspalten. Der eine strebt als gewöhnliches Dirichletsches Integral gegen $f(x)$, der Nachweis des Verschwindens des zweiten benötigt ziemlich umfangreiche Abschätzungen. Schließlich werden für einige Spezialfälle die Transformaten (1) tatsächlich angegeben. *Schmetterer.*

Funktionentheorie:

Valiron, Georges: Sur le rayon de convergence de la série de Lagrange. Bull. Sci. math., II. S. 73_I, 116—122 (1949).

Die Formel von Lagrange gibt insbesondere die Entwicklung nach Potenzen von x für diejenige Funktion $y = \varphi(x)$, welche durch die Gleichung $y - a - x f(y) = 0$ definiert wird, wobei $f(y)$ in $|y - a| < R$ regulär und $f(a) \neq 0$ sein soll. Es bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn man $a = 0$ voraussetzt. In diesem Falle hat man $x = y/f(y)$, $f(0) \neq 0$ (1). $y = \varphi(x)$ ist dann derjenige Zweig der zu (1) inversen Funktion, welcher für $x = 0$ verschwindet. Ist $M(\varrho) = \max_{|y|=\varrho < R} |f(y)|$,

so haben Rouché und Hermite gezeigt, daß $r \geq \max_{\varrho < R} \varrho/M(\varrho)$ (2), wenn r den Kon-

vergenzradius der Entwicklung von $\varphi(x)$ nach Potenzen von x bedeutet. $y = \varphi(x)$ muß auf $|x| = r$ eine Singularität besitzen. — Verf. behandelt zunächst die Frage, wann auf $|x| = r$ eine algebraische Singularität von $y = \varphi(x)$ zu liegen kommt. Es sei $f(y) = f(\varrho e^{i\vartheta})$ in (1) eine ganze Funktion, welche sich nicht auf ein Polynom ersten Grades reduziert und $|f(\varrho e^{i\vartheta})| = \Phi(\varrho, \vartheta)$. Blumenthal hat gezeigt, daß $M(\varrho) = \max_{-\pi < \vartheta \leq \pi} \Phi(\varrho, \vartheta)$ auf Kurven $\vartheta = \lambda(\varrho)$ angenommen wird, welche abtei-

lungsweise analytisch sind. In jedem endlichen Intervall hat also $M(\varrho)$ nur endlich viele Ausnahmewerte, in denen $\lambda'(\varrho)$ nicht existiert. Ist nun ϱ' die Stelle, an welcher $\varrho/M(\varrho)$ sein Maximum r annimmt, und existiert $\lambda'(\varrho)$ für $\varrho = \varrho'$, so besitzt $y = \varphi(x)$ auf $|x| = r$ eine algebraische Singularität. Unter den gemachten Voraussetzungen stimmen also der Rouchésche Konvergenzradius $\max_{0 \leq \varrho < \infty} \varrho/M(\varrho)$ und der Konvergenz-

radius r von $y = \varphi(x)$ überein. — Rouché glaubte beweisen zu können, daß $y = \varphi(x)$ auf $|x| = \max_{0 \leq \varrho < \infty} \varrho/M(\varrho)$ stets eine algebraische Singularität besitze.

[Vgl. auch J. Chazy, C. r. Acad. Sci., Paris 228, 613—616 (1949).] Demgegenüber

beweist Verf.: Ist $f(y) = C y - e^g(y) + y \int_0^y g'(u) \exp g(u) du$ (3), wobei C eine beliebige

Konstante und $g(u)$ eine ganze Funktion mit $g'(0) = 0$, so liegt auf dem Rouché-
schen Konvergenzkreis $|x| = \max_{0 \leq \varrho < \infty} \varrho/M(\varrho)$ (4) keine algebraische Singularität

von $y = \varphi(x)$. Da für die Funktionen (3) $y f'(y) - f(y) = e^g(y)$ gilt und für eine
algebraische Singularität $y f'(y) - f(y) = 0$ sein muß, kann $y = \varphi(x)$ überhaupt
keine algebraischen Singularitäten besitzen. Der Konvergenzradius für die zu (3)
gehörigen Funktionen $y = \varphi(x)$ wird also durch transzendente Singularitäten
festgelegt. Im Spezialfall $C = 0$ und $g(y) = y^p$, p ganze Zahl ≥ 2 , erhält Verf.
die Aussage, daß der Rouché'sche Konvergenzkreis (4) im Innern des Konvergenz-
kreises von $y = \varphi(x)$ enthalten ist. — Schließlich betrachtet Verf. noch kurz die
Verhältnisse, welche sich ergeben, wenn man von $f(y)$ nur mehr Regularität in
 $|y| < R$ verlangt. Lammel (Tutzing).

Wintner, Aurel: On Riemann's reduction of Dirichlet series to power series.
Amer. J. Math. 69, 769—789 (1947).

Die durch $\Gamma(s) f(s) = \int_0^\infty x^{s-1} F(e^{-x}) dx$ hergestellte klassische Beziehung zwi-
schen $f(s) = \sum a_n n^{-s}$ und $F(r) = \sum a_n r^n$ wird hier durch die Sätze Tauberscher
Art beleuchtet. Konvergenz von f für $\sigma > 1$ (und damit von F für $r < 1$) wird vor-
ausgesetzt. Dann folgt aus $\lim_{r \rightarrow 1} (1-r) F(r) = l$, daß auch $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon f(1+\varepsilon) = l$.

Umgekehrt schließen kann man aber nur unter zusätzlichen Annahmen. Es genügen
1. $F(r)$ ist schließlich monoton für $r \rightarrow 1$. 2. $f^*(s) = f(s) - l \zeta(s)$ (konvergent für
 $\sigma > 1$) geht über in eine auf $\sigma = 1$ stetige Grenzfunktion. — 1. kann ersetzt werden
durch $\sum_{n < x} a_n = O(x)$ oder $\sum_{n < x} n a_n = O(x^2)$. Da aus $a_n \geq 0$ auch 1. folgt, ist der
Satz von Ikehara hierin enthalten. Hoheisel (Köln).

Bernštejn (Bernstein), S. N.: Übertragung der Eigenschaften trigonometrischer
Polynome auf ganze Funktionen endlichen Grades. Izvestija Akad. Nauk SSSR,
Ser. mat. 12, 421—444 (1948) [Russisch].

Dans ce travail l'A. donne des applications importantes de la théorie générale
exposée dans quelques de ses travaux précédents [Doklady Akad. Nauk SSSR,
n. S. 51, 327—330 (1946), 52, 565—568 (1946), 54, 103—108, 479—482 (1946)]
pour démontrer des propriétés nouvelles des fonctions entières de degré fini, analo-
giques aux propriétés des polynômes trigonométriques démontrées par lui aupara-
vant. Parmi les nombreux et importants résultats citons les suivants: 1. Si la
fonction entière $G_p(x)$ de degré p satisfait aux conditions suivantes: a) $|G_p(a_k)| \leq 1$
pour tous les points a_k ($\pm k = 0, 1, \dots$) de la suite $\{a_k\}_{-\infty}^\infty$ où $0 < a_{k+1} - a_k \leq \pi/p\mu$
($\mu > 1$), b) il existe un nombre $m > 0$ tel que $\lim_{\pm x \rightarrow \infty} G_p(x)/x^m = 0$. Alors $G_p(x)$ est bornée
pour chaque point x et on a $\sup_{-\infty < x < \infty} |G_p(x)| = g_\mu \leq (\cos(\pi/2\mu))^{-1}$. Supposons maintenant
que $a_{k+1} - a_k = \pi/\mu p$ pour chaque k . 2. Si la fonction entière $G_p(x)$ de degré p satis-
fait aux points $x_k = (k + \frac{1}{2})\pi/\mu p$ ($\mu > 1, k = 0, \pm 1, \dots$) à l'inégalité $|G_p(x_k)| \leq 1$,
alors $(p_1 = \mu p > p)$

$$G_p(x) = \cos(p_1 x) \left\{ G_p(0) + p_1 x \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} G_p(x_k)}{(k + \frac{1}{2}) \pi [p_1 x - (k + \frac{1}{2}) \pi]} \right\}$$

et on a (1) $|G_p(x)| \leq (\cos(\pi/p\mu))^{-1}$, $-\infty < x < \infty$. Si de plus le nombre μ est entier
($\mu = 2, 3, \dots$) on ne peut pas améliorer l'inégalité (1). — L'A. donne ensuite une
nouvelle formule d'interpolation, dont il fait des applications importantes. Pour la

fonction arbitraire $f(x)$ on forme la fonction $(a_k = k\pi/p_1, p_1/q = N > 1)$

$$G_{p_1+q}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f(a_k) \sin p_1(x-a_k) \sin q(x-a_k)}{p_1 q (x-a_k)^2}$$

qui est entière de degré $\leq p_1 + q$ surement dans le cas où $|f(a_k)| < M$. 3. Si $G_p(x)$ est une fonction entière de degré $p \leq p_1 - q$ pour laquelle $|G_p(a_k)| = |f(a_k)| \leq M$ alors on a

$$G_p(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin p_1(x-a_k) \sin q(x-a_k)}{p_1 q (x-a_k)^2} G_p(a_k).$$

On a le même résultat en supposant plus généralement que pour un $m < 1$ on a

$\frac{|G_p(a_k)|}{|a_k|^m + 1} \leq \mu$. 4. Si la fonction entière $G_p(x)$ de degré $p \leq p_1/\mu$ ($\mu > 1$), satisfait

aux inégalités $|G_p(a_k)| \leq 1, -\infty < k < \infty, a_{k+1} - a_k = \pi/\mu$ alors $|G_p(x)| \leq (\cos(\pi/2\mu))^{-1}$.

5. Si l'on a

$$\frac{G_p(x)}{x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \pm \infty), \quad \left| G_p\left(\frac{k\pi}{p}\right) \right| \leq 1, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

alors pour chaque x ($-\infty < x < \infty$) on a

$$\frac{1}{2} \left| G_p\left(x + \frac{\pi}{2p}\right) + G_p\left(x - \frac{\pi}{2p}\right) \right| \leq \frac{4}{\pi},$$

et le signe d'égalité est atteint pour la fonction $G_p(x) = \frac{2 \sin p x}{p x} - \cos p x$ au point $x = 0$.

N. Obrechhoff (Sofia).

Bernštejn (Bernstein), S. N.: Bemerkung zu meiner Arbeit „Übertragung der Eigenschaften trigonometrischer Polynome auf ganze Funktionen endlicher Ordnung“. (Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 12, 421—444 (1948). Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 12, 571—573 (1948) [Russisch].

L'A. donne quelques compléments à son travail précédent. Par exemple il démontre le résultat suivant: Si $G_q(x)$ est une fonction entière de degré q , la fonction $G(x) = \cos(p x) G_q(x)$ sera de degré $h \geq \sqrt{p^2 + q^2}$. N. Obrechhoff (Sofia).

Schwartz, Marie-Hélène: Sur les surfaces de Riemann possédant des points critiques arbitrairement rapprochés. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 154—155 (1949).

Verf. gibt zwei Beispiele von parabolischen Überlagerungsflächen der Riemannschen Kugel Σ , in welchen die Entfernungen der Singularitäten keine feste positive untere Schranke haben. Der totale Defekt der ersten Fläche ist > 2 . Die zweite Fläche hat folgende Eigenschaft: Sei A ein Punkt von Σ und $\sigma(r) > 0$, $\sigma(r) \rightarrow 0$ für $r \rightarrow R$, und $g(r)$ für jedes r ein nichtkompaktes Gebiet der z -Ebene, welches Punkte des Kreises $|z| \leq r$ enthält und durch eine gegebene meromorphe Funktion $f(z)$ auf ein Gebiet von Σ abgebildet wird, das innerhalb des mit dem Radius $\sigma(r)$ um A geschriebenen Kreises fällt. A ist nicht ein asymptotischer Wert oder Grenzwert von asymptotischen Werten von f . A ist dagegen ein solcher Wert stets dann, wenn die Entfernungen der Singularitäten eine positive untere Schranke haben.

V. Paatero (Helsinki).

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

Strodt, Walter: Principal solutions of difference equations. Amer. J. Math. 69, 717—757 (1947).

Der von Nörlund eingeführte Begriff der Hauptlösung einer Differenzengleichung wird im Anschluß an Carmichael in einer sehr bemerkenswerten Weise verallgemeinert. Ausgangspunkt der Betrachtungen ist eine Funktion von $n - 1$ Variablen $f(x, y_1, \dots, y_n)$, die in den y_1, \dots, y_n ein Polynom und für $x \in \mathfrak{G}$ analytisch in x ist: \mathfrak{G} ist ein Gebiet der komplexen x -Ebene. Untersucht werden die Lösungen $y(x)$ der Differenzengleichung $f[x, y(x + \omega_1), \dots, y(x + \omega_n)] = 0$ (1).

in welcher die Spannen $\omega_1, \dots, \omega_n$ beliebig komplex sein können. — Ein wichtiges Hilfsmittel bei den Herleitungen ist die verallgemeinerte Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-b)^{2k}$ (2), in welcher die reellen λ_k nicht ganzzahlig zu sein brauchen und $0 \leq \lambda_k < \lambda_{k+1}$ ($k = 0, 1, \dots$) sowie $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty$ erfüllen. Diese verallgemeinerte Potenzreihe kon-

vergiere in der „Quasiumgebung“ $0 < |x-b| < R$, $\arg \{x-b\} \neq \gamma$ von $x=b$, also einer gewöhnlichen Kreisumgebung, die entlang eines Radius aufgeschnitten ist; der Wert von $(x-b)^{2k} = \exp [\lambda_k \log (x-b)]$ wird durch $\gamma - \pi < \Im \{\log (x-b)\} \leq \gamma + \pi$ festgelegt. — Statt der Differenzengleichung (1) wird zunächst die Folge der approximierenden Differenzengleichungen für die Funktionen $y_t(x)$

$$(3) \quad f[x, y_t(q_{t,1}x + V_{t,1}), \dots, y_t(q_{t,n}x + V_{t,n})] = 0 \quad (t = 1, 2, \dots)$$

behandelt. Hier ist $q_{t,j} = \exp(\omega_j \operatorname{Log} q_t)$ und $V_{t,j} = b_t(1 - q_{t,j})$, wobei die q_t und b_t eine „ $Q(x)$ -Folge“ seien: Die $q_t (\neq 1)$ sind eine Punktmenge der komplexen Zahlenebene mit $\lim_{t \rightarrow \infty} q_t = 1$. Die b_t sind eine dazugehörige Menge von komplexen

Zahlen, welche $\lim_{t \rightarrow \infty} b_t(1 - q_t) = 1$ und $\arg b_t - \alpha = O\{1/|b_t|\}$ erfüllen. Mit $t \rightarrow \infty$

geht formal (3) \rightarrow (1). Notwendige und hinreichende Bedingungen für Punktmenge (q_t) und (b_t), die als $Q(x)$ -Folgen geeignet sind, werden angegeben; die Existenz mindestens einer $Q(x)$ -Folge zu jedem Winkel α wird nachgewiesen. — Eine Lösung $y(x)$ von (1) wird dann als „Vorzugslösung bezüglich der Richtung $\alpha^<$ ($-\pi < \alpha \leq +\pi$) bezeichnet, wenn zu ihr eine $Q(x)$ -Folge angegeben werden kann, daß die in der Form (2) angebbaren Lösungen $y_t(x)$ der zugeordneten Gleichungen (3) in jedem abgeschlossenen Teilbereich von \mathfrak{G} gleichmäßig gegen $y(x)$ konvergieren. Eine Lösung $y(x)$ von (1) wird dann als „Hauptlösung bezüglich der Richtung $\alpha^<$ “ bezeichnet, wenn in jedem abgeschlossenen Teilgebiet \mathfrak{G}_0 von \mathfrak{G} zu $\varepsilon > 0$ eine Menge komplexer Zahlen z_1, \dots, z_n mit $\left| \sum_{j=1}^n |z_j - 1|^2 \right|^{1/2} < \varepsilon$ existiert, so daß

jede Vorzugslösung $y(x, z_1, \dots, z_n)$ der parametrisierten Gleichung $f[x, z_1 y(x + \omega_1), \dots, z_n y(x + \omega_n)] = 0$ für $x \in \mathfrak{G}_0$ die Ungleichung $|y(x, z_1, \dots, z_n) - y(x)| < \varepsilon$ erfüllt. Eine Vorzugslösung ist zugleich auch eine Hauptlösung bezüglich der gleichen Richtung; das Umgekehrte gilt nicht. — Im Mittelpunkt der rechnerischen Durchführung steht die Differenzengleichung $f[x, z_1 y(q_{t,1}x + V_{t,1}), \dots, z_n y(q_{t,n}x + V_{t,n})] = 0$ (4), die in den durchgeführten Fällen durch Potenzreihen gelöst werden kann. Die Konvergenzuntersuchungen für $t \rightarrow \infty$ nehmen einen breiten Raum ein. Ausführlich werden folgende Fälle behandelt: I. Die Polynomkoeffizienten der Funktion f sind bei $x \rightarrow \infty$ analytisch; dazu einige Nebenbedingungen und eine Modifikation. II. $f(x + \omega) = f(x) + \omega \Phi(x)$ und $f(x + \omega) = f(x) + 2\Phi(x)$ mit gewissen (Nörlundschen) Bedingungen für $\Phi(x)$. Hier führen die Untersuchungen auf Hauptlösungen bezüglich der Richtung $\arg \omega$, welche mit den Nörlundschen Hauptlösungen identisch sind. III. Am Beispiel der Differenzengleichung $y(x) - 2y(x+1) = \Phi(x)$ ($\Phi(x)$ analytisch bei $x \rightarrow \infty$) wird der Einfluß von α auf die Hauptlösung untersucht. — Zum Schluß werden die benutzten Hilfssätze bewiesen, insbesondere „fastkonstante Funktionen“ definiert und beschrieben.

Töpfer (Köln).

• Relton, F. E.: Applied differential equations. London: Blackie 1948. VIII, 264 p. 20 s.

An introduction to differential equations intended for engineering and science students. The Au. has made the interesting experiment of publishing this book in conversational style, much as if it were a series of lectures to engineers, with warnings of possible errors and occasional asides on the limitations of academic mathematics. Applications are discussed at length, immediately after the explanation

of any mathematical idea. This approach has obvious advantages, in that students are able to appreciate mathematical ideas in relation to practical problems with which they are familiar. This method may however obscure the purely mathematical ideas, and, particularly in Chapters II and III, (Equations of first order and linear equations with constant coefficients) this danger is not entirely avoided. The reviewer, for instance, after a first rapid reading of the book, found great difficulty in discovering just where in Chapter III the differential equation „with equal roots“ $(D - a)^2 y = 0$ was treated. The value of the book would be increased if, in some future edition, the important mathematical ideas could be made to stand out by typographical variations, with the explanatory discussion in normal type. The chapters on Fourier series, Isoclinals and Numerical methods are well written, and some interesting applications occur in Chapter VII on Partial differential equations.

W. W. Sawyer (Achimota).

Saltykow, M. N.: Méthode de D'Alembert pour intégrer les équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients constants. Acad. Serbe, Bull. Acad. Sci. math. natur., A 2, 190—202 u. serb. Zusammenfassg. 203—204 (1948).

Céressia, Ed.: Méthode d'approximations successives pour l'intégration des systèmes linéaires d'équations différentielles. Bull. Soc. Sci. Liège 16, 84—93 (1947).

Verf. untersucht zwei spezielle Verfahren der schrittweisen Näherungen zur Integration des linearen inhomogenen Systems

$$(1) \quad y'_k = f_k(x) + \sum_{l=1}^n a_{kl}(x) y_l \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Die Funktionen $f_k(x)$ und $a_{kl}(x)$ sollen im Intervall $\langle x_0, x_0 + h \rangle$ stetig sein, und die Anfangsbedingungen sollen $y_k(x_0) = 0$ lauten. — Beim ersten Verfahren wird eine Folge von Funktionensystemen

$$(2) \quad y_{1\mu}, y_{2\mu}, \dots, y_{n\mu} \quad (\mu = 1, 2, \dots)$$

konstruiert vermöge

$$(3) \quad y'_{k,\mu+1} - a_{kk}(x) y_{k,\mu+1} = f_k(x) + \sum_{l=1}^{n'} a_{kl}(x) y_{l\mu},$$

$$(k = 1, 2, \dots, n), \quad (\mu = 0, 1, \dots),$$

wobei der Strich am Summenzeichen andeutet, daß das Summenglied mit dem Index $l = k$ auszulassen ist. Die Folge beginnt mit dem Funktionensystem $y_{10} = y_{20} = \dots = y_{n0} = 0$. — Beim zweiten Verfahren wird wieder eine Folge (2) konstruiert, dieses Mal aber vermöge

$$(4) \quad y'_{k,\mu+1} - a_{kk}(x) y_{k,\mu+1} = f_k(x) + \sum_{l=1}^{k-1} a_{kl}(x) y_{l,\mu+1} + \sum_{l=k+1}^n a_{kl}(x) y_{l\mu},$$

$$(k = 1, 2, \dots, n), \quad (\mu = 0, 1, \dots).$$

Das erste Glied der Folge ist dasselbe wie beim ersten Verfahren. — Verf. zeigt, daß die auf diese Weise konstruierten Folgen (2) im Intervall $\langle x_0, x_0 + h \rangle$ absolut und gleichmäßig gegen ein Funktionensystem y_0, y_1, \dots, y_n streben, welches die im Punkte $x = x_0$ verschwindende Lösung des Systems (1) darstellt. *Quade.*

Chaundy, T. W.: Differential equations with polynomial solutions. Quart. J. Math. (Oxford Ser.) 20, 105—120 (1949).

Verf. beschäftigt sich mit linearen Differentialgleichungen, die für geeignete Werte eines vorkommenden Parameters Polynome jedes Grades zu Lösungen haben. Ist $D = d/dx$, $\delta = xD$, so ist sehr leicht das folgende Ergebnis zu bestätigen: Es sei die lineare Differentialgleichung

$$(1) \quad \sum_{r=0}^p D^r [f_r(\delta) - \lambda g_r(\delta)] y = 0$$

gegeben, wo die f_r, g_r Polynome mit konstanten Koeffizienten sind. Für alle ganzen

Zahlen $n \geq 0$ sei $g_0(n) \neq 0$, und es seien die Zahlen $\lambda_n = f_0(n)/g_0(n)$ alle voneinander verschieden. Dann hat (1) genau für die Zahlen $\lambda = \lambda_n$ Polynome als Lösungen und zwar für jedes λ_n genau ein Polynom des genauen Grades n und mit dem höchsten Koeffizienten 1. — Die Differentialgleichung (1) ist gleichwertig mit

$$[F(x, \delta) - \lambda G(x, \delta)] y = 0,$$

wo

$$F(x, \delta) = \sum_{v=0}^p x^{p-v} \delta(\delta-1) \dots (\delta-v+1) f_v(\delta)$$

und G entsprechend erklärt ist. Da

$$[F(x, \delta-m) - \lambda G(x, \delta-m)] x^m y = [F(x, \delta) - \lambda G(x, \delta)] y$$

ist, hat auch

$$[F(x, \delta-m) - \lambda G(x, \delta-m)] y = 0$$

für geeignete λ Polynome jedes Grades zu Lösungen, wenn (2) eine Differentialgleichung (1) mit den vorher genannten Eigenschaften ist und wenn (1) außerdem noch Lösungen

$$y = \sum_{\mu=1}^m c_{\mu} x^{-\mu}; \quad c_{\mu} \neq 0, \quad \mu = 1, \dots, m$$

für geeignete Werte von λ hat. — Weitere Untersuchungen in der Arbeit bedürfen, wie Verf. selbst angibt, noch einer Ergänzung. *Kamke* (Tübingen).

Blanc, Charles: Sur les équations différentielles linéaires non homogènes, à coefficients variables. Ann. Univ. Grenoble, II. S. 22, 119—134 (1947).

Es sei $L(u) = \sum_0^n a_v u^{(v)}(t)$, $a_v(t)$ v -mal stetig differenzierbar, $a_n = 1$;

$L(v) = \sum_0^n (-1)^v (a_v v)^{(v)}$ der adjungierte Differentialausdruck. Ferner seien $K(t, \tau)$,

$K(t, \tau)$ Lösungen der Differentialgleichungen $L(u) = 0$, $L(v) = 0$ mit den Anfangswerten

$$\frac{\partial^v K}{\partial t^v} = \frac{\partial^v K}{\partial \tau^v} = 0 \quad (v = 0, \dots, n-2), \quad \frac{\partial^{n-1} K}{\partial t^{n-1}} = 1, \quad \frac{\partial^{n-1} \bar{K}}{\partial \tau^{n-1}} = (-1)^{n-1}$$

für $t = \tau$. Dann ergibt sich aus der Lagrangeschen Identität $K(t, \tau) = \bar{K}(\tau, t)$. Dieses Ergebnis wird auch auf den Fall abteilungsweis stetig differenzierbarer a_v ausgedehnt. — Ist

$$\left| \frac{\partial^v K(t, \tau)}{\partial \tau^v} \right| < A_1(\tau) e^{\varrho(t-\tau)} \quad (\varrho > 0, v \leq n-1)$$

und $A_1(\tau)$ im abgeschlossenen Intervall beschränkt, so ist

$$u(t) = \int_0^\infty K(t-\tau, t) F(t-\tau) d\tau$$

eine Lösung von $L(u) = F(t)$. Das Integral kann in Gestalt einer Reihe geschrieben werden, in welcher die noch näher untersuchte Funktion

$$y(s, t) = \int_0^\infty \bar{K}(t-\tau, t) e^{-s\tau} d\tau$$

auftritt. — Schließlich wird ein Vergleichssatz über das Verhalten der Lösungen für große t hergeleitet: Es sei wieder $u(t)$ eine Lösung von $L(u) = 0$, ebenso hat

$K(t, \tau)$ die frühere Bedeutung, ferner sei jetzt $v(t)$ eine Lösung von $\sum_0^n b_v(t) v^{(v)} = 0$ ($b_n = 1$) mit den Anfangswerten $v^{(v)}(t_0) = u^{(v)}(t_0)$ ($v = 0, \dots, n-1$) und für konstante A , $\varrho > 0$ und $t \geq t_0$ sei $\sum_0^{n-1} |u^{(v)}(t)| \leq A e^{-\varrho t}$. Dann ist auch

$$\sum_0^{n-1} |v^{(v)}(t)| \leq B e^{-\varrho t}, \text{ falls}$$

$$\int_{t_0}^{\infty} \sum_0^{n-1} |a_v - b_v| dt \leq C, \quad \sum_0^{n-1} \left| \frac{\partial^r K(t, \tau)}{\partial \tau^r} \right| \leq D e^{\varrho(t-\tau)} \quad (t \leq \tau)$$

ist.

Kamke (Tübingen).

Amitsur, A. S.: A generalization of a theorem on linear differential equations. Bull. Amer. math. Soc. **54**, 937—941 (1948).

Jede lineare homogene Differentialgleichung n -ter Ordnung hat unter den üblichen Voraussetzungen n linear unabhängige Lösungen. Das wird vom Verf. für abstrakte Differentialgleichungen bewiesen. Es sei F ein Feld mit einem Automorphismus $S: a \rightarrow aS$. Eine rechte S -Ableitung D von F ist eine Abbildung von F auf eine Teilmenge mit den Eigenschaften

$$(a + b)D = aD + bD, \quad (ab)D = (aS)(bD) + (aD)b.$$

Wird $a^{(0)} = a$, $a' = aD$, ..., $a^{(n)} = a^{(n-1)}D$ gesetzt, so bilden die Elemente z von F , welche die Gleichung

$$\sum_0^n a_v z^{(v)} = 0 \quad (a_n \neq 0, a_v \in F)$$

erfüllen, einen rechten C -Modul der Dimension $\leq n$. — Entsprechendes gilt für die linke Ableitung. Umkehrung des Satzes und Anwendung auf ein Feld mit einem Zentrum.

Kamke (Tübingen).

Gillis, Paul et Léon van Hove: Un théorème d'unicité pour les systèmes d'équations différentielles du premier ordre. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. **33**, 300—311 (1947).

Da (1) $x'_v(t) = a_v(x_1, \dots, x_n)$ ($v = 1, \dots, n$) das charakteristische System einer linearen homogenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung ist, ergeben sich für (1) Eindeutigkeitssätze auf Grund von Voraussetzungen über die Lösungen der partiellen Differentialgleichung und über gewisse Differentialformen.

Kamke (Tübingen).

Kučer, D. L.: Über einige Kriterien für die Beschränktheit der Lösungen eines Systems von Differentialgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **69**, 603—606 (1949) [Russisch].

L'A. considère un système différentiel de la forme $dx/dt = A(t)x + f(t)$ [$x(t)$ et $f(t)$ sont à valeurs dans R^n , $A(t)$ à valeurs dans l'algèbre des matrices de R^n], et la solution de ce système qui vérifie $x(0) = 0$; une condition est cherchée pour que cette solution soit bornée (pour $t \geq 0$) dès que f est de puissance p^{e} sommable sur $(0, +\infty)$; le résultat obtenu est le suivant: a) il est nécessaire qu'on puisse trouver $N > 0$ et $\nu > 0$ tels que toute solution x de $dx/dt = A(t)x$ vérifie $\|x(t)\| \leq N \cdot \|x(0)\| \cdot \exp(-\nu \cdot t^{1/q})$ ($1/p + 1/q = 1$); b) si $A(t)$ est une fonction bornée, il est nécessaire et suffisant que, pour $N > 0$ et $\nu > 0$ convenables, toute solution x de $dx/dt = A(t)x$ vérifie $\|x(t)\| \leq N \cdot \|x(t_0)\| \cdot \exp(-\nu(t-t_0))$ pour $0 \leq t_0 \leq t$, ceci quel que soit t_0 . Des résultats du même genre sont donnés relativement aux équations de la forme $dx/dt = A(t)x + f(x, t)$ pour lesquelles on a

$$\|f(x, t)\| \leq f(t) \cdot \|x\| \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} f(t)^p dt < +\infty.$$

R. Godement (Nancy).

Sestakov, A. A.: Über das Verhalten der Integralkurven eines Systems von Differentialgleichungen in der Umgebung eines singulären Punktes höherer Ordnung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **65**, 139—142 (1949) [Russisch].

Diese Arbeit ist eine Fortführung einer früheren des gleichen Verf. [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **62**, Nr. 2 (1948)]. Untersucht wird das Differentialgleichungssystem

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

mit in der Umgebung des Nullpunktes analytischen Funktionen $X_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, die im Nullpunkt selbst alle verschwinden. Der Nullpunkt soll ferner ein singulärer Punkt höherer Ordnung sein, in dem alle n^2 partiellen Ableitungen $\partial X_i / \partial x_j$ verschwinden, $i, j = 1, \dots, n$, insbesondere soll $X_i = X_i^{(m)} + X_i^{(m+1)} + \dots + X_i^{(j)} + \dots$, $i = 1, 2, \dots, n$, $m \geq 2$, sein, wo die $X_i^{(j)}$ homogene Polynome vom Grade j in den Veränderlichen x_1, \dots, x_n bedeuten. Dieses System wird durch Einführung neuer Veränderlicher für x_2, \dots, x_n auf ein einfacheres zurückgeführt

$$t \frac{dz_i}{dt} = p_{i1} z_1 + p_{i2} z_2 + \dots + p_{in-1} z_{n-1} + p_{in} t + Z_i(t, z_1, \dots, z_{n-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

(x_1 ist dabei als unabhängige Veränderliche t genommen und nicht transformiert worden), das einen linearen Anteil hat, während die Zusatzglieder Z_i analytische Funktionen darstellen, deren Tyalorentwicklungen mit Gliedern zweiter Ordnung anfangen. Die konstanten Koeffizienten p_{ik} erscheinen dabei als Determinanten, gebildet aus den Funktionen $X_i^{(m)}$ und ihren partiellen Ableitungen an der Stelle a , wo a eine einfache Nullstelle des algebraischen Gleichungssystems $\frac{x_1}{X_1^{(m)}} = \frac{x_2}{X_2^{(m)}} = \dots = \frac{x_n}{X_n^{(m)}}$

ist. In der erwähnten Arbeit des Verf. ist gezeigt, wie das Verhalten der Integralkurven dieses Systems, insbesondere die Existenz und Anzahl der Nullkurven (Nullösungen), abhängt von der Anzahl der Wurzeln mit positivem bzw. negativem Realteil der charakteristischen Gleichung $|p_{ik} - \lambda \delta_{ik}| = 0$, $i, k = 1, \dots, n-1$. Diese Eigenschaften übertragen sich auf das gegebene Gleichungssystem, da die Nullkurven invariant gegenüber der ausgeführten Substitution sind. *Svenson.*

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Yen, Chih-Ta: Sur l'équivalence des formes différentielles extérieures quadratiques à quatre variables. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 817—819 (1948).

Ω sei eine quadratische alternierende Differentialform in 4 Variablen und die Pfaffsche Form θ sei durch $d\Omega = [\theta \Omega]$ definiert. Es liege im differentialgeometrischen Sinne der allgemeine Fall vor (z. B. sei die Form $d\theta$ nicht ausgeartet). Dann kann man mit 4 eindeutig bestimmten Pfaffschen Formen ω^i setzen:

$$\Omega = [\omega^1 \omega^2] + [\omega^3 \omega^4], \quad d\theta = \lambda[\omega^1 \omega^2] - \lambda[\omega^3 \omega^4], \quad \theta = \omega^1 + \omega^3, \quad d\lambda = \lambda_2 \omega^2 + \lambda_4 \omega^4.$$

Man setze noch $d\omega^i = T_{jk}^i[\omega^j \omega^k]$, $d\lambda_i = \lambda_{ik} \omega^k$. Das Äquivalenzproblem für die Form Ω (oder für das System der ω^i) führt auf 12 Fundamentalinvarianten, nämlich

$$\lambda, \lambda_4, \lambda_2, \lambda_{41}, \lambda_{43}, \lambda_{21}, \lambda_{23}, \lambda_{42} - \lambda_{24}, T_{24}^1, T_{13}^2, T_{24}^2, T_{14}^2.$$

Betrachtet man statt der Form Ω die Gleichung $\Omega = 0$, so führt das Äquivalenzproblem auf 9 Invarianten. — Alles ohne Beweise. *Ernst Witt* (Hamburg).

Yen, Chih-Ta: Sur l'équivalence des formes différentielles extérieures quadratiques à quatre variables. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 1203—1204 (1948).

In einer vorangehenden Note (vorsteh. Referat) studierte Verf. das Äquivalenzproblem quadratischer alternierender Differentialformen Ω in 4 Variablen. Dabei wurde $d\Omega = [\theta \Omega]$ gesetzt und angenommen, daß $d\theta$ nicht ausgeartet ist (Koeffizientendet. $\neq 0$). In dieser Arbeit wird der Fall untersucht, der eintritt, wenn $d\theta$ doch ausgeartet ist. — In jedem Fall gilt der Satz: Wenn die Transformationen, die eine quadratische alternierende Differentialform Ω in 4 Variablen festlassen, eine g -gliedrige Liesche Gruppe bilden, so ist $g \leq 4$. *Ernst Witt* (Hamburg).

Ehresmann, Charles et Paulette Libermann: Sur les formes différentielles extérieures de degré 2. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 420—421 (1948).

Auf einer Mannigfaltigkeit V_{2m} heiße eine quadratische alternierende Differentialform Ω (mit $\text{Det.} \neq 0$) vollständig integrabel, wenn durch jedes m -dim. Integralelement mindestens eine m -dim. Integralmannigfaltigkeit geht. Notwendig

und hinreichend hierfür ist: 1. Jedes Integralelement von Ω ist auch Integralelement von $d\Omega$ oder hiermit äquivalent: 2. $d\Omega = [\theta \Omega]$, wobei dann die Pfaffsche Form θ nach Lepage und Papy eindeutig bestimmt ist; es folgt $[d\theta \cdot \Omega] = 0$ und für $m > 2$ $d\theta = 0$. Für $m = 2$ ist Ω stets vollständig integrabel. Allgemein werden für vollständig integrable Ω lokale Normalformen aufgestellt. Vereinfachungen ergeben sich durch die Methoden der nachstehend besprochenen Arbeit.

Ernst Witt (Hamburg).

Ehresmann, Charles et Paulette Libermann: Sur le problème d'équivalence des formes différentielles extérieures quadratiques. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 697—698 (1949).

Auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit V_n (auf der also $Q = \sum g_{ik} dx^i dx^k$ gegeben ist mit $g_{ik} = g_{ki}$, $\text{Det.} \neq 0$) hat man jeder alternierenden v -dim. Differentialform θ mittels g_{ik} in nahe liegender Weise eine $n-v$ -dim. Form zugeordnet, die sog. Adjungierte $*\theta$. — Verf. legen statt Q auf V_n eine alternierende Form $\Omega = \sum h_{ik} [dx_i dx_k]$ zugrunde (mit $h_{ik} = -h_{ki}$, $\text{Det.} \neq 0$, also $n = 2m$). Auch hier läßt sich wieder mittels h_{ik} eine Adjungierte $*\theta$ erklären. Wie in der Riemannschen Geometrie spielt dann der Operator $\delta = *d*$ eine besondere Rolle (mit $\delta\delta = 0$). Ausführliche Anwendung von $*$, d , δ auf Ω^v . Vereinfachungen für die vorstehend besprochene Arbeit. Aufstellung von Bedingungen dafür, daß Ω einen integrierenden Faktor λ hat $[\lambda \Omega] = 0$. Am Schluß dieser Arbeit wird (im allgemeinen) für Ω eine Normalform in Aussicht gestellt.

Ernst Witt (Hamburg).

Vessiot, Ernest: Sur la réductibilité des équations aux dérivées partielles du 1^{er} ordre, à une inconnue, qui ne la contiennent pas et sont linéaires et homogènes par rapport à ses dérivées. Bull. Soc. math. France **75**, 9—26 (1947).

Verf. demonstriert in dieser Abhandlung die Anwendung seiner allgemeinen Theorie der Reduzibilität von Systemen von Differentialgleichungen [erschieden Ann. sci. École norm. sup., III. S. **63**, 1—22 (1946)] an Hand der Differentialgleichungen der Form

$$(1) \quad \frac{\partial z}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^n \theta_{\alpha}(t, x_1, \dots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_{\alpha}} = 0 \quad \text{oder} \quad \theta z = 0,$$

wo θf das Symbol einer infinitesimalen Transformation ist, deren Invarianten die Lösungen von (1) sind. Alle Lösungen z von (1) lassen sich durch n beliebige unabhängige Lösungen z_1, \dots, z_n von (1), die eine sogenannte vollständige Lösung von (1) bilden, ausdrücken in der Form $z = \varphi(z_1, \dots, z_n)$. — Die Punkttransformationen $z'_{\alpha} = \varphi_{\alpha}(z_1, \dots, z_n)$ ($\alpha = 1, \dots, n$) des Raumes der z_{α} führen (einfach transitiv) jede vollständige Lösung z_1, \dots, z_n in die vorgegebene vollständige Lösung z'_1, \dots, z'_n und die Differentialgleichung (1) in sich über. — Das System S , bestehend aus den Relationen $\theta z_{\alpha} = 0$, $\frac{\partial(z_1, \dots, z_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \neq 0$ ($\alpha = 1, \dots, n$), heißt zu (1) assoziiert; seine Lösungssysteme sind die vollständigen Lösungen von (1). — Die Transformationen der Form

$$(2) \quad t' = t, \quad x'_{\alpha} = f_{\alpha}(t, x_1, \dots, x_n) \quad (\alpha = 1, \dots, n)$$

führen θf in $\theta' f = \frac{\partial f}{\partial t'} + \sum_{\alpha=1}^n \theta' f_{\alpha} \frac{\partial f}{\partial x'_{\alpha}}$ über, wo

in θf_{α} die Argumente t' , x'_{α} vermöge (2) einzuführen sind. Diejenigen Transformationen der Form (2), welche (1) invariant lassen, bilden die Gruppe der Autotransformationen von (1) und führen eine vollständige Lösung u_1, \dots, u_n von (1) in eine andere vollständige Lösung (3) $u'_{\alpha} = \varphi_{\alpha}(u_1, \dots, u_n)$ ($\alpha = 1, \dots, n$) über; (3) repräsentiert bei willkürlicher Wahl der unabhängigen Funktionen φ_{α} die Gruppe der Permutationen der vollständigen Lösungen, welche durch die Autotransformationen (2) hervorgerufen werden. — Die Reduktion von (1) besteht in ihrer Transformation in die Form $\partial f / \partial t = 0$, deren Lösungen x_1, \dots, x_n sind. Wenn die f_{α} in (2) eine vollständige Lösung von (1) bilden, so leistet die Transformation (2) diese Reduktion. — Verf. betrachtet gewisse Untersysteme Σ von S , welche das System S umfassen und noch ein weiteres System Ω von Differentialgleichungen mit z_1, \dots, z_n als abhängigen und t, x_1, \dots, x_n als unabhängigen Veränderlichen, wobei Ω stets als invariant gegenüber θf und als frei von solchen Ableitungen angesehen werden kann, in denen eine Differentiation nach t vorkommt. Bei Reduktion von (1) in $\partial f / \partial t = 0$ vermöge einer Transformation (2) reduziert sich jedes Σ auf ein System σ ; jedes Paar Σ, σ , wo σ eine Reduktion von Σ ist, bestimmt ein zu Σ adjungiertes System Δ von Differentialgleichungen, deren Lösungssysteme die Überführung von Σ in σ bewirken, wenn sie als Systeme f_{α} in (2) verwendet werden. Verf. zeigt, daß es ausgezeichnete vollständige Lösungen u_1, \dots, u_n gibt, derart, daß sie bei Zugrundelegung eines Rationalitätsbereiches D von Zahlen und Funktionen von t, x_1, \dots, x_n , in welchem (1) rational ist, zu einem in D rationalen System Σ

ein gleichfalls in D rationales adjungiertes System A bestimmen, von dem sie Lösungen sind. — Das Problem der Reduktion von (1) hängt ab von der Struktur der zu (1) gehörigen spezifischen Gruppe γ , die aus denjenigen Autotransformationen (2) von (1) besteht, welche das System S und jedes in D rationale Untersystem Σ invariant lassen. Zwei vollständige Lösungen von (1) heißen konjugiert, wenn die eine in die andere vermöge einer Transformation aus γ übergeht. Eine vollständige Lösung heißt primitiv, wenn sie Lösung eines in D rationalen Untersystems Σ ist, dessen Lösungssysteme sämtlich zur gegebenen vollständigen Lösung konjugiert sind. Die primitiven vollständigen Lösungen erscheinen so in Klassen von paarweise konjugierten Lösungen eingeteilt; jede Klasse ist gegeben durch ein Untersystem π von S , das invariant gegenüber γ ist. Die Systeme π können als Resolventensysteme zu (1) dienen. — Verf. beweist nun den folgenden, von ihm als (verallgemeinertes) Galoissches Theorem bezeichneten Satz: Damit eine rationale Funktion $R(u_1, \dots, u_n)$ einer vollständigen Lösung u_1, \dots, u_n von (1) rational sei in D , ist erforderlich, daß sie alle Transformationen der Gruppe γ gestatte. Falls u_1, \dots, u_n eine primitive vollständige Lösung ist, reicht diese Bedingung auch hin. — Dabei bedeutet $R(z_1, \dots, z_n)$ eine Funktion, die im gewöhnlichen Sinne rational ist in bezug auf z_1, \dots, z_n und gewisse ihrer Ableitungen nach t, x_1, \dots, x_n , mit Koeffizienten aus D . $R(u_1, \dots, u_n) = \varrho(t, x_1, \dots, x_n)$ gestattet eine Transformation der Form (3), wenn gilt:

$$R(u'_1, \dots, u'_n) = \varrho(t, x_1, \dots, x_n) = R(u_1, \dots, u_n); R(u_1, \dots, u_n) = \varrho(t, x_1, \dots, x_n)$$

ist rational in D , wenn ϱ rational in D ist. — Wenn G die zu γ holodrisch-isomorphe Permutationsgruppe der vollständigen Lösungen u_1, \dots, u_n ist, dann kann das vorstehende Galoissche Theorem auch so formuliert werden: Damit eine rationale Funktion einer vollständigen Lösung u_1, \dots, u_n von (1) in D rational sei, muß sie sämtliche Transformationen aus G gestatten; für eine primitive vollständige Lösung ist diese Bedingung auch ausreichend. — Die Gruppe G hängt natürlich von der zugrunde gelegten vollständigen Lösung u_1, \dots, u_n ab; beim Übergang zu einer anderen vollständigen Lösung mittels einer Transformation im Raum von n Veränderlichen u_1, \dots, u_n ist G durch die transformierte Gruppe zu ersetzen. — Zu dem Galoisschen Theorem sowie den obengenannten Resolventen-Systemen π gelangt Verf. auch noch auf einem anderen Wege, indem er dasjenige in D rationale Untersystem Π_0 von S heranzieht, welches ein Untersystem aller übrigen in D rationalen Untersysteme ist; Π_0 ist selbst ein π . Neumer (Mainz).

Mendes, M.: Sur la forme de l'intégrale d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre en involution. J. Math. pur. appl., Paris, IX. S. 26, 99—114 (1948).

Si considera il sistema di equazioni alle derivate parziali del primo ordine in involuzione: $F_i(x_k, p_l) = 0$ ($i, k, l = 1, 2, \dots, n$) con F_i funzioni olomorfe. Si studia, in alcuni casi, l'integrale di questo sistema nell'intorno di un punto nel quale il determinante funzionale:

$$\Delta = \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(p_1, p_2, \dots, p_n)}$$

si annulla. Citiamo, ad esempio, il caso in cui le F_i sono lineari nelle p_l . Miranda.

Mendes, M.: Sur les fonctions définies par un système d'équations aux dérivées partielles. J. Math. pur. appl., Paris, IX. S. 27, 177—204 (1948).

Si studiano le proprietà degli integrali di un sistema di equazioni alle derivate parziali, estendendo i risultati trovati da Poincaré per una equazione alle derivate parziali. — Dato il sistema in involuzione:

$$F_i(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r)$$

le F essendo funzioni olomorfe dei loro argomenti, si cercano, ad. es., gli integrali olomorfi. Si cerca anche l'integrale del sistema dato che si riduce identicamente ad una funzione olomorfa di x_1, \dots, x_n quando altre r funzioni degli stessi argomenti si annullano. C. Miranda (Napoli).

Courant, Richard and Peter Lax: On nonlinear partial differential equations with two independent variables. Commun. pure appl. Math., New York 2, 255—273 (1949).

Si considera un sistema di equazioni a derivate parziali quasi-lineari del primo ordine

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \left(a_{iv} \frac{\partial u_i}{\partial x} + b_{iv} \frac{\partial u_i}{\partial y} \right) + c_v = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, n),$$

ove le $u_i(x, y)$ sono funzioni incognite e le a_{iv}, b_{iv}, c_v sono funzioni note di $x, y, u_1, u_2, \dots, u_n$, e si studia per tale sistema il problema di Cauchy: determinare un sistema di integrali, quando ne siano assegnati i valori su una data curva. Il problema viene risolto, riconducendo, mediante la considerazione delle curve caratteristiche e mediante altri artifici, il sistema (1) a una forma particolare. I risultati raggiunti dagli AA. sono quei medesimi che erano già stati stabiliti sotto le stesse ipotesi da Maria Cinquini-Cibrario (questo Zbl. 31, 161); peraltro tale lavoro non viene citato dagli AA. S. Cinquini (Pavia).

Pasqua, Dario Del: Risoluzione, con sole integrazioni, dell'equazione differenziale di tipo parabolico, con i dati di Cauchy su una curva assegnata. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. S. 2, 55—61 (1950).

In dieser Arbeit wird vom Verf. nur mittels Integrationen (nämlich Quadraturen und Residuumsberechnungen) die Gleichung (mit konstanten Koeffizienten) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y)$ gelöst, wobei die Anfangsbedingungen auf einer Kurve $x = \varphi(y)$ (φ analytisch und umkehrbar) gegeben sind. Das alles geschieht mittels der Fantappiè'schen Methode der Funktionaloperatoren [s. L. Fantappiè, Rend. Circ. mat. Palermo 57, 137—195 (1933); dies. Zbl. 8, 160]; übrigens war dieselbe Gleichung im Falle, wo die Anfangsbedingungen auf einer Geraden $x = \text{const.}$ gegeben sind, von Fantappiè selbst gelöst worden [s. L. Fantappiè, Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis. mat. natur., VI. S. 18, 266—270 (1933); dies. Zbl. 8, 161]. Bei

der Hypothese des Verf. war aber der Operator $I g(x, y) = \int_{\varphi(y)}^x g(t, y) dt$ nicht mehr mit dem Operator $\frac{\partial}{\partial y}$ vertauschbar, was für die Anwendung der Methode von Fantappiè notwendig ist. Die Vertauschbarkeit wird mittels der Transformation

$$z_1(x, y) = I z(x, y) = \int_{\varphi(y)}^x z(t, y) dt$$

wiederhergestellt. Die auflösenden Formeln sind einfach. F. Pellegrino (Rom).

Amerio, Luigi: Sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico. Amer. J. Math. 69, 447—489 (1947).

Es werde die folgende partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typ mit m unabhängigen Veränderlichen betrachtet:

$$(1) \quad E[u] = \sum_{i,k=1}^m a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^m b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c u = f.$$

Sei $L = \sum_{i=1}^n \cos(n, x_i) \left\{ b_i - \sum_{k=1}^m \frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k} \right\}$ und sei $E^*[u]$ der zu $E[u]$ adjungierte

Differentialausdruck und $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ die konormale Ableitung von u . Sei ferner $F(M, P)$ eine Fundamentallösung von $E^*[u] = 0$, als Funktion von M betrachtet, und von $E[u] = 0$ als Funktion von P . Verf. beweist: Wenn $A(M)$ und $B(M)$ zwei Funktionen des Punktes M sind, der auf dem Rand σ des beschränkten und im Bereich τ , wo die a_{ik}, b_i, c, f definiert sind, enthaltenen Gebietes τ variieren möge, von der Art, daß für jeden Punkt Q von $\tau' - \tau$ die Gleichung

$$(2) \quad 0 = \int_{\sigma} \left\{ A(M) \left(\frac{\partial F(M, Q)}{\partial \nu} - L(M) F(M, Q) \right) - B(M) F(M, Q) \right\} d_M \sigma \\ - \int_{\tau} f(M) F(M, Q) d_M \tau$$

gilt, dann ist die im Inneren von τ durch die Gleichung

$$(3) \quad u(P) = \int_{\sigma} \left\{ A(M) \left(\frac{\partial F(M, P)}{\partial \nu} - L(M) F(M, P) \right) - B(M) F(M, P) \right\} d_M \sigma - \int_{\tau} f(M) F(M, P) d_M \tau$$

definierte Funktion ein Integral von (1), das in näher präzisiertem Sinne auf σ den Bedingungen $u(M) = A(M)$, $\frac{\partial u(M)}{\partial \nu} = B(M)$ genügt. Dieser Satz gestattet die Berechnung der Lösungen der Randwertprobleme für die Gleichung (1) nach dem Verfahren von Picone. Sei in der Tat $\{g(Q)_r\}$ ein in $\tau' - \tau$ vollständiges Funktionensystem und werde $v_r(M) = \int_{\tau' - \tau} g_r(Q) F(M, Q) d_Q \tau$ gesetzt, dann ist (2) folgendem Integralgleichungssystem von Fischer-Riesz äquivalent

$$(2') \quad \int_{\sigma} \left\{ A \left(\frac{\partial v_r}{\partial \nu} - L v_r \right) - B v_r \right\} d\sigma - \int_{\tau} f v_r d\tau = 0.$$

Ist z. B. A auf σ und f in τ gegeben (Dirichletsches Problem), so liefert (2') die Fourierkoeffizienten von B bezüglich des Systems $\{v_r\}$. Der Beweis der Vollständigkeit des Systems $\{v_r\}$ läßt sich auf den Beweis des Eindeutigkeitstheorems für das zu (1) gehörige Dirichletsche Problem in einer wohlbestimmten Klasse von Lösungen zurückführen. Wenn das Problem Eigenlösungen besitzt, so sind diese dadurch charakterisiert, daß ihre konormalen Ableitungen auf σ zu der Folge $\{v_r\}$ orthogonal sind. — Im zweiten Teil der Arbeit befaßt sich Verf. mit einem zweiten gleichfalls auf die Methode von Picone zurückgehenden Lösungsverfahren, welches keinen expliziten Gebrauch von der Fundamentallösung $F(M, P)$ macht. Unter Einführung des Systems der Monome $w_r = x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m}$ ($\alpha_i = 0, 1, \dots$) betrachtet er das System von Fischer-Riesz, das man erhält, indem man die Greensche Formel auf u und w_r anwendet:

$$(4) \quad - \int_{\tau} u E^* [w_r] d\tau = \int_{\sigma} \left\{ A \left(\frac{\partial w_r}{\partial \nu} - L w_r \right) - B w_r \right\} d\sigma - \int_{\tau} f w_r d\sigma$$

und beweist, daß die auf τ definierte Funktion u und die auf σ definierten Funktionen A und B dann und nur dann (2) und damit (3) erfüllen, wenn sie (4) genügen. Daraus folgt, daß die Klasse der Integrale von (1), für die die Formeln (2), (3) von Green gelten, durch (4) charakterisiert sind. Ist A auf σ und f in τ gegeben, so liefert (4) die Fourierkoeffizienten des unbekannten Vektors mit zwei Komponenten (u , B), was die Berechnung von u ermöglicht. In analoger Weise gelangt man zur Bestimmung der Lösung anderer Randwertprobleme, wie z. B. des Problems von Neumann, des gemischten Problems u. a.

Guetano Fichera (Rom).

Kogan, S. Ja.: Über die Lösung des Neumannschen Problems durch die alternierende Methode von Schwarz. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 65, 261—264 (1949) [Russisch].

Die Lösung der Neumannschen (d. i. zweiten) Randwertaufgabe für ein Gebiet D des R_n , das aus zwei sich teilweise überdeckenden Gebieten D_1 und D_2 besteht, — für D_1 und D_2 werden vorausgesetzt jeweils stetige Randfunktionen $f_1(P)$ bzw. $f_2(P)$ und geschlossene Begrenzungs-Hyperflächen S_1 bzw. S_2 , die durch nach allen Veränderlichen dreimal stetig differenzierbare Funktionen darstellbar sind — vermittelst der alternierenden Methode von Schwarz wird auf folgende Hilfssätze zurückgeführt. 1. Ist die Funktion $F(P)$ auf der Begrenzung S eines Gebietes G in R_n , die den oben für S_1 und S_2 angegebenen Bedingungen genügt, stetig mit Ausnahme des Schnittes l mit einer anderen Hyperfläche, wo sie wie $|\log^\alpha \delta|$ unendlich wird (α ganz, δ = Abstand von l), und genügt sie überdies der zur Lösung der zweiten Randwertaufgabe notwendigen Bedingung $\int_S F(P) ds = 0$, so läßt sich eine Lösung

u dieser Aufgabe angeben mit folgenden Eigenschaften: u ist darstellbar als gewöhnliche Potentialfunktion mit überall außer auf l stetiger Belegung, u ist stetig in G bis zur Begrenzung S , $\partial u / \partial x_k$ ($k = 1, \dots, n$) ist stetig in G , wird jedoch bei Annäherung auf beliebigem Wege an l unendlich wie $|\log^{\alpha+1} \delta|$, und das Dirichletsche Integral von u in G ist endlich. 2. Eine Familie harmonischer Funktionen $\{q_k(N)\}$, die in einem Gebiet G des R_n definiert sind, gehöre der Klasse L^2 an und es gelte:

$$\int \dots \int_G^n |q_k(N)|^2 dx_1 \dots dx_n < M^2$$
 gleichmäßig für alle k . Dann ist $\{q_k(N)\}$ kompakt im Sinne gleichmäßiger Konvergenz und die Grenzfunktion harmonisch. *Svenson*.

Brelot, Marcel et Gustave Choquet: Lignes de Green et mesure harmonique. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 1556—1557 (1949).

Es sei $G(M)$ die Greensche Funktion zum Pole O eines beliebigen beschränkten Gebietes D des n -dimensionalen Raumes ($n \geq 2$), und es sei S_λ die durch $G(M) = \lambda$ ($0 < \lambda < +\infty$) gegebene Punktmenge (Greensche Kugel). Es bezeichne weiter μ_λ das harmonische Maß von S_λ , gemessen in O , bezüglich des Gebietes $G(M) > \lambda$, und es heiße jedes einfache offene orientierte, in D gelegene Kurvenstück L , dessen Tangente in jedem Punkte mit grad $G (\neq 0)$ gleichgerichtet ist, eine Greensche Linie (ligne de Green). Schließlich werde $\inf(L)$ als $\inf G(M)$ für $M \in L$ und entsprechend $\sup(L)$ definiert und L regulär genannt, wenn $\inf(L) = 0$ und $\sup(L) = +\infty$ ist; jedes reguläre L trifft jedes S_λ in genau einem Punkte. Die Menge dieser Schnittpunkte mit S_λ heiße E_λ ; diese bestimmen zwischen irgend zwei E_λ eine umkehrbare eindeutige Zuordnung, die kanonisch genannt wird. Verf. gibt ohne Beweis folgende Sätze an: 1a) Für alle λ ist $\mu_\lambda(S_\lambda - E_\lambda) = 0$; bei der kanonischen Zuordnung bleiben die μ_λ ungeändert. Daher kann man auf der Menge L der regulären Greenschen Linien ein Maß ν mit $\nu(L) = 1$ definieren. 1b) Für die Teilmenge L' der regulären Linien endlicher Länge gilt $\nu(L') = 1$. — 2) Jedem Element von L' entspricht ein Randpunkt. Ist e eine Menge von Randpunkten mit harmonischem Maß, so besitzt die entsprechende Teilmenge von L' ein ν -Maß, das gleich dem harmonischen Maß von e in O ist. — Die Betrachtungen lassen sich unter gewissen Voraussetzungen auf nichtbeschränkte Gebiete übertragen.

Maruhn (Dresden).

Lelong-Ferrand, Jaqueline: Étude des fonctions surharmoniques positives dans un cylindre ou dans un cône. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 340—341 (1949).

L'A. adapte au cône et au cylindre son étude des fonctions surharmoniques > 0 dans un demi-espace (ce Zbl. **33**, 373). On part de la décomposition en un potentiel de Green et une fonction harmonique > 0 représentée selon Martin; et on utilise le développement de Bouligand de la fonction de Green. *Brelot*.

Lelong-Ferrand, Jacqueline: Extension du théorème de Phragmen-Lindelöf-Heins aux fonctions sousharmoniques dans un cône ou dans un cylindre. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 411—413 (1949).

Dans un domaine conique D de sommet O , la portion de sphère $OM = R$ admet, dans la partie de D contenue dans la sphère, une mesure harmonique qui pour $R \rightarrow \infty$ est équivalente à une expression $A_0(r/R)^{\alpha_0} q_0(m)$ ($r = OM$, $Om = 1$, m sur OM). α_0 et q_0 permettent de préciser l'allure de u sousharmonique dans D , de $\lim \leq 0$ en tout point-frontière à distance finie et satisfaisant à $\lim m(r)/r^{\alpha_0} = \lambda < \infty$ [où $m(r) = \text{borne sup } u$]. En particulier on aura $u < \lambda r^{\alpha_0} q_0(m)$, la borne sup. de $u/r^{\alpha_0} q_0(m)$ sur $OM = r$ tend vers la même borne dans D pour $r \rightarrow \infty$ etc. Étude analogue du demi-cylindre. Pas de démonstrations mais références à des notes antérieures.

Brelot (Grenoble).

Thorin, G. O.: Convexity theorems generalizing those of M. Riesz and Hadamard with some applications. Meddel. Lunds Univ. mat. Sem., **9**, 57 S. (1948).

Es sei E ein reeller Vektorraum und $f(x)$ ein in E erklärtes reelles Funktional. $f(x)$ heißt konvex in einem konvexen Bereich C von E , wenn $f(\sigma x_1 + (1 - \sigma)x_0)$ für alle $x_0, x_1 \in C$ und $0 \leq \sigma \leq 1$ als Funktion von σ konvex ist. Ein im Produktraum $E^p = E \times \dots \times E$ definiertes reelles Funktional $f(x_1, \dots, x_p)$ heißt p -subharmonisch im Punkte (x_{01}, \dots, x_{0p}) , wenn $f(x_{01} + \lambda_1 x, \dots, x_{0p} + \lambda_p x)$ für jedes $x \in E$ eine im üblichen Sinne subharmonische Funktion von $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ in $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ ist. Auch die von P. Lelong gegebene Definition der plurisubharmonischen Funktionen (dies. Zbl. 28, 56) läßt sich auf Vektorräume übertragen. — Sei nun F ein weiterer beliebiger Raum und $f(x, y)$ ein für $x \in C, y \in F$ erklärtes reelles Funktional, ferner K eine Menge linearer Abbildungen $x = Lu$ eines Vektorraumes H in E . Man bilde $M(u; K) = \underset{\substack{L \in K \\ y \in F}}{\text{fin}} f(Lu, y)$ für alle $u \in H$, deren

Bilder $x = Lu$ für alle $L \in K$ in C liegen. Es sei vorausgesetzt, daß die Menge Γ der so zulässigen u nicht leer ist; Γ ist dann eine konvexe Menge in H . Schließlich sei für feste reelle λ , feste $x_0, x_1 \in C$ und $0 \leq \sigma \leq 1$ gesetzt:

$$f_{x_0, x_1, \lambda}(\sigma, y) = f(\sigma x_1 + (1 - \sigma)x_0, y) - \lambda \cdot \sigma.$$

Gilt dann stets

$$\underset{\substack{0 \leq \sigma \leq 1 \\ y \in F}}{\text{fin}} f_{x_0, x_1, \lambda}(\sigma, y) \leq \underset{y \in F}{\text{fin}} \{f_{x_0, x_1, \lambda}(0, y); f_{x_0, x_1, \lambda}(1, y)\},$$

so ist $M(u; K)$ ein konvexes Funktional in Γ . Die Voraussetzung über $f_{x_0, x_1, \lambda}(\sigma, y)$ ist insbesondere dann erfüllt, wenn $F = E^{p-1}$ [d. h. $y = (x_2, \dots, x_p)$] und $f(x, y) \equiv f(x; x_2, \dots, x_p)$ ein p -subharmonisches Funktional in E^p ist, das für jede Strecke $S \in C$ in $S \times E^{p-1}$ von oben beschränkt ist. — Dieser allgemeine Satz umfaßt u. a. den Hadamardschen Dreikreisatz und seine von G. Valiron angegebene Verallgemeinerung auf Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, ferner einen Satz von M. Riesz über die Konvexität des Maximums einer bilinearen Form [Acta math., Uppsala 49, 465—497 (1927)]. Als weitere Anwendung seiner Methoden gibt Verf. neue Beweise zweier Sätze von Hardy und Littlewood sowie Verallgemeinerungen dieser Sätze.

K. Stein (Münster).

Salem, R.: Convexity theorems. Bull. Amer. math. Soc. 55, 851—860 (1949).

Expository article on Marcel Riesz's convexity theorem, its extensions and applications.

Horváth (Paris).

Kodaira, Kunihiko: Harmonic fields in Riemannian manifolds (Generalized potential theory). Ann. Math., Princeton, II. S. 50, 587—665 (1949).

In den beiden ersten Kapiteln werden die Grundlagen für die Theorie der harmonischen Differentiale, größtenteils mit kurz gefaßten Beweisen, zusammengestellt. In einer kompakten n -Mannigfaltigkeit \mathfrak{M} mit hinreichend differenzierbarer Riemannscher Metrik heißt eine (alternierende Differential-)Form φ des Grades ϱ harmonisch, wenn nicht nur sie selbst stetig differenzierbar ist und ihr Differential $r\varphi$ verschwindet, sondern auch die ihr mit Hilfe der Metrik zugeordnete duale Form $\delta\varphi$ des Grades $n - \varrho$ diese Eigenschaften hat: $r\delta\varphi = \pm \delta r^*\varphi = 0$. Der Hauptsatz von Hodge sagt, daß es zu vorgeschriebenen Perioden genau eine harmonische Form gibt. Er wurde bisher mit der Methode der Parametrix bewiesen. Der Verf. nimmt dagegen eine Arbeit von H. Weyl [Duke Math. J. 7, 411—444 (1940); dies. Zbl. 26, 20] zum Vorbild, in der die harmonischen Funktionen der Potentialtheorie durch Orthogonalitätseigenschaften gekennzeichnet sind. Genauer sind es nicht die harmonischen Funktionen, sondern solche, die fast überall mit einer harmonischen Funktion übereinstimmen, also die Elemente des zugehörigen Hilbertschen Raumes. Das hat den Vorteil, daß sich die Hauptsätze leicht durch Orthogonalprojektionen im Hilbertschen Raum ergeben. Dieser Weylsche Plan wird bei den harmonischen Formen durchgeführt. Zwei Formen φ und ϑ gleichen Grades,

die beide in einem offenen Teil \mathfrak{D} von \mathfrak{M} mit über \mathfrak{D} quadratisch integrierbaren Komponenten erklärt sind, haben ein inneres Produkt $(\varphi, \vartheta)_{\mathfrak{D}}$, das als Integral über \mathfrak{D} erklärt ist und die nötigen Eigenschaften aufweist. Sei nun

$$(\varphi, \tau \chi)_{\mathfrak{D}} = (\varphi, \tau^* \psi)_{\mathfrak{D}} = 0$$

für alle hinreichend differenzierbaren Formen χ und ψ des Grades $\varrho - 1$ bzw. $\varrho + 1$, die jeweils außerhalb eines kompakten Teils von \mathfrak{D} verschwinden, dann heiße φ in \mathfrak{D} harmonisch. Die Hauptschwierigkeit ist, zu beweisen, daß φ mit einer im alten Sinne harmonischen Form fast überall in \mathfrak{D} übereinstimmt. Dies gelingt mit Hilfe einer Grundleistung, d. h. einer Form, die bei einem gegebenen Punkt p eine Singularität bestimmter Art hat, in einer Umgebung von p aber sonst harmonisch ist. Um sie herzustellen, setzt der Verf. die Mannigfaltigkeit \mathfrak{M} und die Metrik als analytisch voraus (bei der Parametrix genügt mehrmalige Differenzierbarkeit); die Grundleistung stellt er nach dem Vorbild von Hadamard (Le problème de Cauchy etc., Paris 1932; dies. Zbl. 6, 205) durch konvergente Potenzreihen in örtlichen Koordinaten mit dem Nullpunkt p dar. Sie hängt im Kleinen analytisch vom Aufpunkt, von p und von den die Singularität bestimmenden Größen ab. Nach längeren Entwicklungen folgt eine fast überall gültige Darstellung einer im neuen Sinne harmonischen Form φ durch ein mit der Grundleistung gebildetes Integral φ_1 , und φ_1 ist eine in \mathfrak{M} zweimal stetige, sogar analytische Form und daher harmonisch im alten Sinne. Daher ergeben sich die Hauptsätze über harmonische Formen unmittelbar mit Weyls Methode der orthogonalen Projektion. Schließlich wird der Riemann-Rochsche Satz auf harmonische Formen übertragen: die Anzahl der linear unabhängigen Formen, deren Verhalten an gegebenen Stellen und deren Perioden bestimmten linearen Bedingungen genügen, wird ausgedrückt durch die betreffende Bettische Zahl von \mathfrak{M} , die Zahlen der Bedingungen und durch eine in gewisser Weise reziproke gegenüberstehende Rangzahl ähnlicher Art. Im Falle $n = 2$ ist es genau der Riemann-Rochsche Satz. — Die — notwendigerweise umfangreichen — Entwicklungen der Arbeit sind knapp, aber vollständig dargestellt; viele Einzelheiten und Nebenergebnisse konnten hier nicht erwähnt werden. H. Kneser.

Variationsrechnung:

Franchis, Franco de: Sur les trajectoires des problèmes variationnels. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 1013—1015 (1948).

Vedi questo Zbl. 33, 279.

S. Cinquini (Pavia).

Dufresnoy, Jacques: Remarques sur les extrémales du problème fondamental de calcul des variations. Bull. Techn. Univ. Istanbul 1, 2—10 und türkische Zusammenfassg. 1—2 (1948).

Verf. untersucht Variationsprobleme, die von Integralen

$$\int_a^b \varphi(y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx$$

handeln, bei denen die unabhängige Veränderliche x im Integranden nicht auftritt. Bedeuten $y_i = f_i(x)$ Funktionen, die in $\langle a, b \rangle$ stetige erste Ableitungen besitzen, so soll (c) die durch dieses Funktionensystem erklärte Kurve im $(n+1)$ -dimensionalen x, y_1, \dots, y_n -Raum sein. Ist $\lambda(y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n)$ eine ein für allemal fest vorgegebene stetige Funktion seiner Argumente, dann wird durch

$$Y_i = f_i(x), \quad X = \int_a^x \lambda[f_1, \dots, f_n, f'_1, \dots, f'_n] dx + \gamma$$

der Kurve (c) eine Kurve (C) im $(n+1)$ -dimensionalen X, Y_1, \dots, Y_n -Raume zugeordnet. Umgekehrt, zu der durch $Y_i = F_i(X)$ gegebenen Kurve (C) gehört

vermöge $A(Y_1, \dots, Y_n, Y'_1, \dots, Y'_n)$ und

$$y_i = F_i(X), \quad x = \int_A^X A[F_1, \dots, F_n, F'_1, \dots, F'_n] dX + I'$$

eine Kurve im $(n+1)$ -dimensionalen x, y_1, \dots, y_n -Raum. Soll diese mit der Kurve (c) identisch sein, so muß

$$(1) \quad A \cdot \lambda \left(F_1, \dots, F_n, \frac{F'_1}{A}, \dots, \frac{F'_n}{A} \right) \equiv 1$$

sein. — Ist die Funktion A durch diese Identität bestimmt und ist

$$(2) \quad I = \int_{(C)} \Phi(Y_1, \dots, Y_n, Y'_1, \dots, Y'_n) dX,$$

so geht nach Einführung von $X = \int_a^x \lambda dx + \gamma$ dieses Integral über in

$$(3) \quad \int_{(c)} \varphi(y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx$$

mit dem Integranden

$$\varphi(y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) \equiv \lambda \Phi \left(y_1, \dots, y_n, \frac{y'_1}{\lambda}, \dots, \frac{y'_n}{\lambda} \right).$$

Aus der Variation der Integrale (2) und (3)

$$\begin{aligned} \int_{(c)} \left[\Sigma \left(\varphi_{y_i} - \frac{d}{dx} \varphi_{y'_i} \right) \delta y_i \right] dx + [(\varphi - \Sigma y'_i \varphi_{y'_i}) \delta x]_a^b = \\ \int_{(C)} \left[\Sigma \left(\Phi_{Y_i} - \frac{d}{dX} \Phi_{Y'_i} \right) \delta Y_i \right] dX + [(\Phi - \Sigma Y'_i \Phi_{Y'_i}) \delta X]_A^B \end{aligned}$$

folgt: Ist (C) eine Extremale von (2), welche $\Phi - \Sigma Y'_i \Phi_{Y'_i} = 0$ genügt, so ist (c) eine Extremale von (3), welche $\varphi - \Sigma y'_i \varphi_{y'_i} = 0$ genügt, und umgekehrt. Dieses Ergebnis erleichtert in gewissen Fällen das Auffinden von Extremalen von (2), wie an verschiedenen Beispielen erläutert wird. U. a. liefert das Verfahren einen von Liouville angegebenen Fall von Integrabilität. — Variationsprobleme, bei denen die Funktion A nicht aus (1) bestimmt werden kann, liegen vor, wenn λ ein linearer homogener Ausdruck in y_1, \dots, y_n ist. Auch bei diesen kann man mit Hilfe ähnlicher Überlegungen in gewissen Fällen Extremalen von (2) finden. Als klassisches Beispiel hierzu wird die Umwandlung des Hamiltonschen Prinzips der Mechanik in das von Maupertuis vorgeführt.

Quade (Hannover).

Mancill, Julian D.: Unilateral variations with variable end-points. Amer. J. Math. 69, 121—138 (1947).

Es wird bei einem ebenen Variationsproblem in Parameterdarstellung der Fall behandelt, daß die auf ein Minimum zu untersuchende Kurve E_{12} auf dem (im Sinn ihrer Durchlaufungsrichtung rechten) Rande des für die Vergleichskurven erlaubten Gebietes R liegt und daß die Endpunkte 1, 2 auf zwei Kurven C_1, C_2 [C_s : $x = X_s(\tau)$, $y = Y_s(\tau)$] beweglich sind. Man setze $D(x', X'_s) = x' Y'_s - y' X'_s$ und

$$\tilde{T}(x, x', X'_s) = (X'_s F_x(x, x') + Y'_s F_y(x, x')) / D(x', X'_s).$$

Die gewöhnliche Transversalitätsbedingung (T_2) für den Punkt 2 ist zu ersetzen durch: (A_2) $\tilde{T}(x, x', X'_2) \geq 0$ oder, falls $D(x', X'_2) = 0$, $F(x, x') \leq 0$, wenn C_2 diessseits, $F(x, x') \geq 0$, wenn C_2 jenseits, (*) $F(x, x') = 0$, wenn C_2 beiderseits der Normalen von E_{12} in R verläuft. Die notwendige Bedingung für den Punkt 1 lautet analog mit umgekehrten Ungleichheitszeichen. Setzt man ferner $T(x; x', x'') = F_{xy'} - F_{yx'} + F_1(x' y'' - x'' y')$, so muß bekanntlich $T \leq 0$ sein längs E_{12} . Bedingung (A_s) mit allen Ungleichungen im strengen Sinn [also unter Ausschluß des Falles (*)] heiße (B_s). Dann ist (B_1), (B_2) zusammen mit $T < 0$

längs E_{12} ein System von hinreichenden Bedingungen (es ist hier also keinerlei Bedingung Jacobischer Art erforderlich). Ist aber $T=0$ längs E_{12} (also E_{12} Extremale), so ist hinreichend: (B_1) , (B_2) , kein Paar konjugierter Punkte auf E_{12} . Oder: (T_1) , (B_2) [(B_1) , (T_2)], kein Brennpunkt von C_1 [C_2] auf E_{12} . Oder: (T_1) , (T_2) und eine geeignete Bedingung über die gegenseitige Lage von 1, 2 und den Brennpunkten oder eine Bedingung über die Lage der Kurve C_2 zur Transversale durch 2 des Feldes der zu C_1 transversalen Extremalen. — Voraussetzungen: Vergleichskurven von der Klasse D' ; für die notwendigen Endpunktsbedingungen: F , F_x , F_y stetig in R , Kurven C_1 , C_2 von der Klasse C' ; für die hinreichenden Bedingungen: F von der Klasse C''' in einem R im Innern enthaltenden Gebiet, $F_1 > 0$ in R , Kurven E_{12} , C_1 , C_2 von der Klasse C'' . Boerner (Gießen).

Lévy, Paul: Le problème des cols en calcul des variations. Bull. Soc. math. France **75**, 31—42 (1947).

Der Zweck dieser Abhandlung besteht hauptsächlich darin, die Aufmerksamkeit auf einen Gesichtspunkt und einen Begriff im Sinne der variationstheoretischen Methode von M. Morse hinzulenken. Der Begriff ist der des Sattels (Paß). Im 2. Abschnitt wird dieser Begriff allgemein folgendermaßen definiert: Ω sei ein Raum, in dem eine Topologie definiert ist, e ein allgemeiner Punkt, und $\Phi(e)$ eine stetige Funktion in Ω . — Ein Punkt a heißt Sattel (Paß) im engeren Sinn, wenn in einer Umgebung von a der Bereich $\Phi(e) < \Phi(a)$ aus mindestens 2 Teilbereichen besteht, die durch den Bereich $\Phi(e) > \Phi(a)$ und a getrennt werden. In der Definition der Schwelle (Sattel im weiteren Sinn) tritt an die Stelle von a ein Kontinuum C , auf dem $\Phi(e) = c$ ist, und $\Phi(a)$ ist durch c zu ersetzen. Häufig mögen die topologischen Eigenschaften von Ω allein die Existenz von Sätteln garantieren. — Als erster Hinweis auf die Richtung, in welcher Verf. die Bedeutung dieses Begriffes sieht, wird eine kurze Skizze für die Existenz einer geschlossenen Geodätischen auf einer stetig differenzierbaren geschlossenen Fläche gegeben. In den folgenden Abschnitten wird zur Illustration die bekannte Frage nach den geschlossenen Geodätischen auf Polyedern herangezogen. Insbesondere werden das reguläre Tetraeder, der Würfel und das Oktaeder eingehender untersucht, wobei im allgemeinen die Scharen gleicher Länge als Schwellen, die singulären Geodätischen durch die Ecken als Sättel im engeren Sinne charakterisiert werden. Hinsichtlich eines Ellipsoids mit den Achsen $2a$, $2b$, $2c$, $c < b$ und den entsprechenden Scheiteln A , A' ; B , B' ; P , P' werden die Kurven A , A' betrachtet. Der Verf. zeigt, daß es bezüglich ihrer Längen entweder einen oder zwei Sättel gibt, je nachdem ob c mindestens gleich einer gewissen Größe $\varphi(a, b)$ ist, oder kleiner. Im ersten Fall ist der Sattel die Halbellipse ABA' . Dabei wird von einer vorgängigen allgemeinen Bemerkung Gebrauch gemacht, daß es für die Untersuchung eines Problems unter Umständen genügt, sich einer einzigen Familie von Kurven zu bedienen, welche die betrachtete Fläche stetig überstreicht. Schließlich ist ein Abschnitt dem Problem der kleinsten Rotationsfläche gewidmet. Verf. versagt es sich, die Probleme unter den am Anfang erwähnten allgemeinen Gesichtspunkten zu untersuchen. Er zieht es vielmehr vor, die Fragen ihrer Natur entsprechend mit elementaren anschaulichen Methoden zu erörtern. Leider sind ein paar kleine Unstimmigkeiten stehen geblieben (z. B. S. 34, Zeilen 5, 6; S. 35, Zeile 29). Baebler (Zürich).

Thom, René: Sur une partition en cellules associée à une fonction sur une variété. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 973—975 (1949).

V_n sei eine zweimal differenzierbare n -dimensionale Mannigfaltigkeit, und f eine zweimal differenzierbare Funktion auf V_n , die dort nur endlich viele und nicht ausgeartete kritische Stellen P_i besitzt. Dann kann man mit Hilfe der Funktion f eine Zerlegung von V_n in Zellen definieren, derart, daß jeder kritische Punkt P_i vom Typus p (im Sinne von M. Morse) Mittelpunkt einer offenen p -Zelle ist. —

Die Beweisskizze beschreibt den Beweisgang folgendermaßen: 1. Definition eines auf V_n überall einmal differenzierbaren positiven Linienelementes ds^2 , das in der Umgebung jeder kritischen Stelle P_i euklidisch ist. 2. Auf Grund dieser Metrik ist es möglich, auf V_n den Gradienten von f zu definieren, und dieser ist außerhalb der Menge der kritischen Stellen von Null verschieden. 3. Das Gradientenfeld ermöglicht die Definition einer einparametrischen Gruppe von Homöomorphismen mit den P_i als Fixpunkten. Längs den Gruppentrajektorien ist f monoton. 4. Die Zusammenfassung der von einem kritischen Punkt ausgehenden Trajektorien, längs denen $f(P) = -x_1^2 - \dots - x_p^2$ abnimmt, zu einer Teilmannigfaltigkeit. Aus der Darstellung $f(P) = -x_1^2 - \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2$ in einer geeigneten Umgebung einer kritischen Stelle vom Typus p erkennt man, daß diese Mannigfaltigkeiten offene p -Zellen sind. — Es handelt sich nicht um eine Zellenzerlegung im üblichen Sinne und Sprachgebrauch der Topologie. Dennoch führt sie zu Aussagen über Bettische Zahlen gewisser echter oder unechter Teilmannigfaltigkeiten von V_n , z. B. zur Abschätzung $\beta_p(V_n) \leq \text{Anzahl der } p\text{-Zellen}$. Daran werden als Anwendung einige Abschätzungen über die Anzahlen der kritischen Stellen geknüpft. Z. B. ist die Anzahl derjenigen vom Typ I mindestens so groß wie die Anzahl der Erzeugenden der Fundamentalgruppe von V_n . Baebler (Zürich).

El'sgol'z (Elsholz), L. E.: Veränderung der topologischen Struktur der Niveauflächen. Mat. Sbornik, n. S. 23 (65), 399—418 (1948) [Russisch].

Auf einer Mannigfaltigkeit M_n sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion f gegeben. 1. Mittels der Formel von Mayer-Vietoris und Formeln von Bockstein über die Bettischen Gruppen des Summenkomplexes zweier Komplexe [Mat. Sbornik, n. S. 9, 365—376 (1941)] werden die Änderungen der Bettischen Zahlen (mod 2) und der Bettischen Gruppen des Bereiches $f \leq x$ beim Durchgang von x durch einen kritischen Wert, der in einem nichtausgearteten kritischen Punkt angenommen wird, untersucht. 2. Zur Beschreibung der Änderungen der Bettischen Zahlen (mod 2) der Niveauflächen $f = x$ in nichtausgearteten kritischen Punkten knüpft Verf. an seine frühere Arbeit in den Mat. Sbornik, n. S. 5, 559—564 (1939); dies. Zbl. 22, 405 an und gibt eine Reihe von Ergänzungen, von denen sich eine auf den Fall bezieht, daß die Mannigfaltigkeit M_n begrenzt ist; eine andere Ergänzung erledigt einen früher ungelösten Ausnahmefall durch den folgenden Satz: Es sei die Dimension der Mannigfaltigkeit $n = 2k$. Notwendig und hinreichend dafür, daß die k -dimensionale Bettische Zahl (mod 2) der Niveaufläche $f = x$ sich beim Durchgang von x durch einen kritischen Wert nicht ändert, ist die Existenz eines Zyklus z^k in der M^{2k} , der folgende Eigenschaft besitzt: $z^k \cdot z^k$ ist nicht homolog 0 (mod 2) auf der M^{2k} . 3. Es wird die Änderung der Fundamentalgruppe der Niveaufläche $f = x$ beim Durchgang von x (von kleineren zu größeren Werten) durch einen kritischen Wert untersucht. Einige Beispiele für die Ergebnisse sollen angeführt werden: Der Typ des (nicht ausgearteten) kritischen Punktes sei k . a) Wenn $k > 2$ und $n - k > 2$ sind, ändert sich die Fundamentalgruppe von $f = x$ nicht. b) Der kritische Punkt habe den aufsteigenden Typus $k = 1$, und es sei $n - k > 2$, dann erhält die Fundamentalgruppe von $f = x$ eine neue freie Erzeugende. c) Der kritische Punkt habe den absteigenden Typus $k = 1$, und es sei $n - k > 2$; dann vereinigen sich zwei Komponenten der Niveaufläche $f = x$ zu einer, deren Fundamentalgruppe gleich dem freien Produkt der Fundamentalgruppen der vereinigten Komponenten ist. d) $k = 2$, $n - k > 2$. Dann erhält die Fundamentalgruppe von $f = x$ eine neue Relation, die aber auch trivial sein kann.

Thimm (Bonn).

Morse, Marston: Functions on a metric space and a setting for isoperimetric problems. Studies Essays, pres. to R. Courant, 253—263 (1948).

Es werden die Methoden der Morseschen Theorie der Variationsrechnung im

Großen auf isoperimetrische Probleme übertragen. Es sei zunächst S eine geschlossene, m -dimensionale, 4mal stetig differenzierbare Mannigfaltigkeit, auf der die 3mal stetig differenzierbaren Funktionen F und H definiert sind. Ein kritischer Punkt von F bzw. H ist ein solcher, in dem dF bzw. dH als Funktion der Differentiale der lokalen Koordinaten identisch verschwindet. Die Teilmenge $S^* = (S|F = 1)$ von S , auf der $F = 1$ ist, möge weder kritische Punkte von F noch von H enthalten. H^* sei die Funktion, die auf S^* mit H übereinstimmt. Das „isoperimetrische Problem“ besteht darin, die kritischen Punkte von H^* auf S^* zu finden. Es werde angenommen, daß H und H^* nur nicht-ausgeartete kritische Punkte haben. Es sei n_k die Anzahl der kritischen Punkte von H vom Index k auf $(S|F \leq 1)$ und m_k die Anzahl der kritischen Punkte von H^* vom Index k , in welchen der Gradient von H die Richtung abnehmender Werte von F hat. Setzt man $M_k = m_k + n_k$ und versteht man unter R_k die k -te Bettische Zahl der berandeten Mannigfaltigkeit $(S|F \leq 1)$, so bestehen zwischen den R_k und den M_k die aus der Morseschen Theorie bekannten Ungleichungen, insbesondere ist $M_k \geq R_k$. Aus der Kenntnis der R_k und n_k kann man also unter Umständen auf $m_k > 0$, d. h. auf die Existenz von Lösungen des isoperimetrischen Problems schließen. Dieser Gedanke wird nun auf allgemeine metrische Räume S übertragen. S und die Funktionen F und H werden dabei vier hier nicht anzuführenden Axiomen unterworfen.

H. Seifert (Heidelberg).

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Kreisel, G.: Some remarks on integral equations with kernels: $L(\xi_1 - x_1, \dots, \xi_n - x_n; \alpha)$. Proc. R. Soc. London A 197, 160—183 (1949).

Es handelt sich um eine Integralgleichung der Form

$$k(\xi_1, \dots, \xi_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_1, \dots, x_n) L(\xi_1 - x_1, \dots, \xi_n - x_n; \alpha) dx_1 \dots dx_n,$$

wobei L Lebesgue-integrierbar und k und ψ beschränkt sein soll. Wenn k mit Ungenauigkeiten behaftet ist, kann ψ in weitem Maße unbestimmt werden, da starke Oszillationen von ψ nach dem Fourierschen Integraltheorem nur geringe Schwankungen von k ergeben. Gesucht werden glatte Lösungen ψ , die dann auf gewisse Probleme der Gravitationsverteilung und der Oberflächenwellen angewandt werden. Insbesondere wird

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u_1, \dots, u_n) \mu(x_1 - u_1, \dots, x_n - u_n) du_1 \dots du_n$$

mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mu(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1$$

gesetzt, wobei μ in geeigneter Weise konstruiert wird. Ferner wird eine untere Grenze des Maximums von $|\psi|$ für alle mit einem experimentell gegebenen k verträglichen Funktionen ψ gegeben. Endlich werden allgemeine Bedingungen für ψ angegeben, damit durch Näherungsangaben von k auch ψ näherungsweise bestimmt ist.

Schmeidler (Berlin).

Parodi, Maurice: Sur une propriété d'une équation intégrale singulière. Bull. Sci. math., II. S. 71, 203—205 (1947).

Sia $\begin{matrix} f(t) \\ f_n(t) \end{matrix}$ una eventuale soluzione dell'equazione:

$$f(t) - \lambda \int_0^{\infty} K(x) f(\varepsilon(x) + t) dx = \begin{matrix} g(t) \\ g^{(n)}(t) \end{matrix}$$

Fra dette soluzioni $f(t)$ e $f_n(t)$ sussiste la relazione: $f_n(t) = f^{(n)}(t)$. *C. Miranda*.

Parodi, Maurice: Sur une propriété des noyaux réciproques. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 810—812 (1948).

Si determina una proprietà dei nuclei reciproci: cioè di quei nuclei per cui le due relazioni:

$$\left. \begin{matrix} f(t) \\ g(t) \end{matrix} \right\} = \int_0^{\infty} K(t, x) \left\{ \begin{matrix} g(x) \\ f(x) \end{matrix} \right\} dx$$

si equivalgono.

C. Miranda (Napoli).

Parodi, Maurice: Sur un type d'équations intégrales de seconde espèce résolubles par le calcul symbolique. J. Math. pur. appl., Paris, IX. S. **28**, 35—62 (1949).

Si considera l'equazione integrale singolare, di seconda specie, del tipo:

$$f(t) + \lambda \int_0^{\infty} K(x, t) f(x) dx = g(t).$$

Viene ripreso un procedimento già usato dall'Autore in molte precedenti Note [vedi il precedente lavoro e C. r. Acad. Sci., Paris **226**, 980, 1877—1878, 1948 (1948) e questo Zbl. **29**, 400; **32**, 24] che consiste nel trasformare l'equazione data in una equazione funzionale che sotto diverse ipotesi è suscettibile di una formula risolutiva.

C. Miranda (Napoli).

Parodi, Maurice et Louis Poli: Résolution d'équations intégrales par transformation en équations à noyaux réciproques. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 37—40 (1950).

Die Integralgleichung $\int_0^{\infty} K(t, x) f(x) dx = g(t)$ kann manchmal mit Vorteil mit

Hilfe der Laplace-Transformation in $\int_0^{\infty} N(s, x) f(x) dx = \vartheta(s)$ umgeformt und da-

durch leichter aufgelöst werden. Dies wird an Beispielen erläutert. Erwähnt sei das Formelpaar

$$g(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \text{ber}_{\text{bei}}(2\sqrt{t}x) f(x) dx, \quad f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \theta(x) \text{ber}_{\text{bei}}(2\sqrt{t}x) dx,$$

wo $\theta(s)$ die Laplace-Transformierte von $\vartheta(t)$ ist. — Auch der umgekehrte Weg ist manchmal von Nutzen.

Schmeidler (Berlin).

Delerue, Paul: Note sur le calcul symbolique à n variables et son application à la résolution de quelques équations intégrales. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 807—808 (1949).

Se le due funzioni: $\varphi(p_1, p_2, \dots, p_n)$ e $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ si corrispondono mediante la relazione:

$$\varphi(p_1, p_2, \dots, p_n) = p_1 p_2 \cdots p_n \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} e^{-\sum_{i=1}^n p_i x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

si dice che φ è l'immagine di f nel calcolo simbolico ad n variabili. Si fanno applicazioni di questa trasformazione alla risoluzione di qualche equazione integrale.

C. Miranda (Napoli).

Delerue, Paul: Calcul symbolique à n variables et équations intégrales à n variables. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 916—919 (1949).

Mediante il calcolo simbolico ad n variabili (vedi il precedente lavoro) si generalizzano per le equazioni integrali ad n variabili molti risultati dati da Parodi per $n = 1$ (per es. questo Zbl. **33**, 185).

C. Miranda (Napoli).

Delerue, Paul: Note sur une formule opératoire nouvelle en calcul symbolique. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 1197—1199 (1949). Correction. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 1228 (1950).

Die r -fach konfluente hypergeometrische Reihe nimmt für gewisse Parameterwerte die Gestalt $\sum x^n/n! (nr+r)!$ an; ihre Laplacetransformierte ist dann also im wesentlichen eine Exponentialreihe. Verf. drückt diese einfache Tatsache mit den Bezeichnungen des symbolischen Kalküls etwas umständlicher aus und verwendet die Transformation zur Lösung einer speziellen, offenbar ad hoc konstruierten Integralgleichung. *W. Hahn (Berlin).*

Humbert, Pierre: Image nouvelle pour la fonction de Bessel. C. r. Acad. Sci., Paris **230**, 504—505 (150).

Zu der Besselfunktion $I_t(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{1+2m}}{m! \Gamma(t+m+1)}$ mit imaginärem Argument, betrachtet als Funktion der Variablen t , wird das operatorische Abbild $p \int_0^{\infty} e^{-pt} I_t(x) dt$ (Laplace-Transformation) berechnet. Es lautet:

$$p \sum_m \frac{e^{mp}}{m!} \frac{x^m}{2^m} \nu\left(\frac{x}{2} e^{-p}, m\right) \quad \text{mit} \quad \nu(t, m) = \int_m^{\infty} \frac{t^x}{\Gamma(x+1)} dx.$$

Doetsch (Freiburg i. Br.).

Edrei, Albert: Sur des formules d'inversion pour les transformées de Stieltjes et certains théorèmes taubériens. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 1365—1367 (1949).

Ist $\psi(t) \equiv \text{const.}$ eine reelle, nichtabnehmende Funktion und p eine ganze Zahl,

so läßt sich die Stieltjes-Transformation $f(z) = \int_0^{\infty} \frac{d\psi(t)}{t+z}$ in folgender Weise umkehren:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+0}^{\pi-0} \Re [f(r e^{i\theta}) e^{i(p+1)\theta}] d\theta = \frac{(-1)^p}{r^{p+1}} \int_0^r t^p d\psi(t) \quad (p \geq 0)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+0}^{\pi-0} \Re [f(r e^{i\theta}) e^{i(p+1)\theta}] d\theta = \frac{(-1)^{p+1}}{r^{p+1}} \int_r^{\infty} t^p d\psi(t) \quad (p < 0).$$

Die zu diesen Gleichungen führenden Rechnungen gestatten asymptotische Auswertungen der rechten Seiten, die Verallgemeinerungen eines von Hardy und Littlewood [Proc. London math. Soc., II. S. **30**, 23—37 (1930), Theorem 4] bewiesenen Tauberschen Satzes ergeben. *Doetsch (Freiburg i. Br.).*

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Kantorovič, L. V.: Funktionalanalysis und angewandte Mathematik. Uspechi mat. Nauk **3**, Nr. 6, 89—185 (1948) [Russisch].

Verf. macht sich zur Aufgabe, das Vorurteil zu überwinden, als sei die Funktionalanalysis nur eine mathematische Disziplin von rein theoretischer Bedeutung. Die Sätze, die zumeist die Auflösung einer gegebenen Funktionalgleichung durch Näherungsverfahren betreffen, sind deshalb bei größter Allgemeinheit zugleich so formuliert, daß (außer der Existenz und evtl. Eindeutigkeit der Lösung) auch Abschätzungen der Konvergenzgüte des Verfahrens gewonnen werden, die die praktische Brauchbarkeit sichern sollen. — Auf ähnliche Bestrebungen, die Funktionalanalysis für die mathematische (Sobolev) und theoretische Physik (Gelfant) nutzbar zu machen, wird hingewiesen. — In Kap. I werden zunächst die im folgenden benutzten bekannten Eigenschaften linearer normierter Räume und Operatoren in ihnen zusammengestellt und Beispiele gegeben (§ 1). Ein Satz von Banach über Konvergenz linearer Operationen wird angewandt auf Näherungsormeln zur numerischen Quadratur und auf singuläre Integrale (§ 2). Ein Satz von Banach über die Konvergenz des Iterationsverfahrens zur Auflösung einer Gleichung $x = Hx + y$ mit $\|H\| = q < 1$ wird bewiesen (§ 3). — Kap. II enthält die allgemeine Theorie der Näherungsverfahren zur Lösung linearer Probleme der Analysis, die als lineare Gleichungen $Kx = y$ ($x \in X, y \in Y$) in Banachschen (d. h. vollständigen linearen normierten) Räumen (X, Y, \dots) aufgefaßt werden. Dabei wird neben die „genaue“ Gleichung eine (vereinfachte) „angenäherte“ $K\bar{x} = \bar{y}$ ($\bar{x} \in X, \bar{y} \in Y$) gestellt. Im allgemeinen ist $\bar{X} = Y \subset X = Y$, $K = I - \lambda H$ ($I = \text{Identität}, \lambda \text{ reell}$); $Kx = y$ heißt dann „Gleichung zweiter Art“ (§ 1). So

bekommt man für ein unendliches System linearer Gleichungen oder für eine Integralgleichung eine Näherungslösung \bar{x} samt einer Abschätzung für $\|x - \bar{x}\|$, indem man zu einem endlichen Gleichungssystem übergeht durch Verwendung der Abschnittsmatrix (§ 3), einer Quadraturformel (§ 4), der Ritzschen Momentenmethode (§ 5) oder durch Ersatz des gegebenen Kernes durch einen entarteten (§ 6). Ein weiteres Verfahren vermittelt zwischen denjenigen von § 3 und § 4. Eine Anwendung auf gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung stellt das Verfahren von Galerkin dar (§ 7). — Kap. III behandelt ein Verfahren zur Lösung von Extremalaufgaben. Um $I(x)$ zum Minimum zu machen, geht man von einer Stelle x_0 in Richtung des Gradienten bis zu dem Punkt x_1 , der auf dieser Geraden den kleinsten Wert von $I(x)$ ergibt, dann ebenso von x_1 nach x_2 usw. Diese von Cauchy stammende Idee wurde schon verschiedentlich fortentwickelt. Sie wird hier auf lineare Probleme im Hilbertschen Raum \mathfrak{H} angewandt, ist aber grundsätzlich viel allgemeiner verwendbar. Die Lösung von $Ax = \varphi$ ($x, \varphi \in \mathfrak{H}$; $A \geq 0$) ist auf ein Minimumproblem zurückführbar und daher diesem „Verfahren des steilsten Abfalls“ zugänglich (§ 2). Insbesondere wird dieses benutzt zur Umkehrung unbeschränkter Operatoren (§ 3), zur Ermittlung der Eigenwerte vollstetiger symmetrischer Operatoren (§ 4), zur Lösung endlicher linearer Gleichungssysteme (§ 5) sowie Fredholmscher Integralgleichungen, auch mit unsymmetrischem Kern (§ 6) und zur Untersuchung selbstadjungierter gewöhnlicher Differentialoperatoren zweiter Ordnung (§ 7). Die Anwendung auf partielle (elliptische) Differentialgleichungen wird nur angedeutet. — Kap. IV überträgt das Newtonsche Näherungsverfahren auf allgemeine Funktionalgleichungen $P(x) = 0$. Dazu wird die Ableitung $P'(x)$ eines Funktionals $P(x)$ eingeführt. Bildet P den Raum X in den Raum Y ab, so heißt P differenzierbar (nach Fréchet) an der Stelle x , wenn es ein $H \in (X \rightarrow Y)$ (d. h. ein lineares Funktional H , welches X in Y abbildet) und eine reelle Funktion $\varepsilon(\delta)$ mit $\varepsilon(\delta) \rightarrow 0$ gibt, so daß

$$\|P(x + \Delta x) - P(x) - H(\Delta x)\| \leq \|\Delta x\| \cdot \varepsilon(\|\Delta x\|);$$

man setzt $P'(x) = H$. Analog wird P'' erklärt; es ist $P''(x) \in (X \rightarrow (X \rightarrow Y))$. Verschiedene bekannte Regeln der Differentialrechnung lassen sich übertragen (§ 1). — Eine Näherungslösung x_n von $P(x) = 0$ wird nun verbessert gemäß $x_{n+1} = x_n - [P'(x_n)]^{-1} P(x_n)$; hinreichende Bedingungen für Existenz und Eindeutigkeit der Lösung sowie für Konvergenz des Verfahrens werden angegeben. Auch eine Vereinfachung ist zulässig, bei der $P'(x_n)$ durch $P'(x_0)$ ersetzt wird (§ 2). Für nichtlineare Gleichungssysteme mit n Unbekannten wurde dies Verfahren schon von Runge und König benutzt. Auf Anregung des Verf. wurde es von Zagadskij (Diss. Leningrad 1946 und dies. Zbl. 30, 392) auf nichtlineare Integralgleichungen angewandt (§ 3).

Beispiel: Die Funktionalgleichung $x(s) = 1 - 0,4854s + s^2 + \int_0^1 st \cdot \arctg x(t) dt$ hat die genaue Lösung $x^*(s) = 1 + s^2$; setzt man $x_0(s) = 3/2$, so wird $x_1(s) = 1 + s^2 + 0,0067s$. — Eine Fortsetzung der Arbeit wird angekündigt. — Ein Ausbau der Verfahren hinsichtlich der Anwendung auf partielle Differentialgleichungen dürfte erwünscht sein. Wecken (Haltingen).

Beurling, Arne: On the spectral synthesis of bounded functions. Acta math., Uppsala 81, 225—238 (1949).

L^1 und L^∞ bedeuten die metrischen Räume der in $-\infty < x < \infty$ meßbaren Funktionen, die summierbar bzw. äquivalent mit beschränkten Funktionen sind. Zu jedem $\varphi(x) \in L^\infty$ gehört seine Spektralmenge Λ_φ , gebildet aus denjenigen reellen λ , für welche die Schwingung $e^{i\lambda x}$ in der von der Menge $\varphi(x + \tau)$, $-\infty < \tau < \infty$, aufgespannten Mannigfaltigkeit im Sinne der schwachen Topologie beschränkter Funktionen enthalten ist. Das Hauptproblem der Spektralsynthese von L^∞ besteht darin, zu entscheiden, ob jedes $\varphi(x) \in L^\infty$ in der schwachen Hülle der von den Schwingungen $e^{i\lambda x}$ ($\lambda \in \Lambda_\varphi$) aufgespannten Mannigfaltigkeit enthalten ist. Dieses Problem ist ungelöst. Hierzu hat L. Schwartz (folgendes Referat) gezeigt, daß für Funktionen in einem Euklidischen Raum von mehr als 2 Dimensionen die Spektralsynthese im allgemeinen in der schwachen Topologie unmöglich ist, was darauf hinweist, daß die schwache Topologie zu eng ist. Verf. stellt sich das Problem: Für welche positiven Gewichtsfunktionen $w(x) \in L^1$ ist es richtig, daß zu jedem $\varphi(x) \in L^\infty$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein trigonometrisches Polynom $\sum c_\nu e^{i\lambda_\nu x}$ ($\lambda_\nu \in \Lambda_\varphi$) gefunden werden kann derart, daß

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x) - \sum c_\nu e^{i\lambda_\nu x}| w(x) dx < \varepsilon?$$

Satz 1. Wenn $w(x) = w(|x|)$ eine nichtwachsende Funktion von $|x|$ ist, so ist die Approximation (1) immer möglich. — Zur Aufstellung weiterer Sätze werden

folgende Begriffe eingeführt: $g(t)$ heißt eine Contraction von $f(t)$, wenn für jedes Wertepaar t_1, t_2 gilt: $|g(t_1) - g(t_2)| \leq |f(t_1) - f(t_2)|$. A sei der Raum der Funktionen $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} F(x) dx$ mit der Metrik $\|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)| dx$, wobei $F \in L^1$. Eine Funktion $f(t)$ heißt contractibel in A , wenn jede ihrer Contraktionen $g(t)$, normalisiert durch die Bedingung $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$, auch zu A gehört. $f(t)$ heißt gleichmäßig contractibel in A , wenn für jede gegen 0 konvergierende Folge von normalisierten Contraktionen $g_n(t)$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\| = 0$. — Satz 2. Eine hinreichende Bedingung dafür, daß die Approximation (1) möglich ist, besteht darin, daß jede meßbare Funktion $F(x)$ der Klasse $|F(x)| \leq w(x)$ eine Fourier-Transformierte hat, die in A gleichmäßig contractibel ist. — Die gleichmäßig contractibeln Funktionen werden dann noch in Zusammenhang gebracht mit den von v. Neumann und Schoenberg [Trans. Amer. math. Soc. 50, 467—487 (1941)] betrachteten und vom Verf. als negativ definite Funktionen bezeichneten Integralen der Form

$$\lambda(x) = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x \alpha}{\alpha^2} d\mu(\alpha)$$

mit nichtabnehmendem $\mu(\alpha)$.

Doetsch (Freiburg i. Br.).

Schwartz, Laurent: Sur une propriété de synthèse spectrale dans les groupes non compacts. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 424—426 (1948).

Die Fourier-Transformierte einer Funktion, deren Variable in einem reellen Raum X^n von n Dimensionen variieren, sei durch die übliche Formel gegeben, und ihre Variablen sollen in einem Raum Y^n variieren. — Eine Menge von auf X^n definierten Funktionen $f(x)$ heiße invariant, wenn sie mit $f(x)$ auch alle Translationen $f(x-h)$ enthält. — Wenn \mathfrak{A}^1 ein vektorieller, abgeschlossener invarianter Unterraum des Banachschen Raumes L^1 der auf X^n summierbaren Funktionen ist, so ist sein Cospektrum A die Menge der Punkte a von Y^n , wo alle Fourier-Transformierten der Funktionen aus \mathfrak{A}^1 verschwinden. Wenn A leer ist, so ist $\mathfrak{A}^1 = L^1$ [N. Wiener, Ann. Math., Princeton, II. S. 33, 1—100 (1932); dies. Zbl. 4, 59]. Problem: Kann \mathfrak{A}^1 definiert werden als Menge aller Funktionen aus L^1 , deren Fourier-Transformierten auf A verschwinden? Dieses Problem ist äquivalent mit einem anderen, das sich auf den Raum L^∞ (der zu L^1 dual ist) bezieht und an einem Satz von Beurling [Acta math., Uppsala 77, 127—136 (1945)] anknüpft. Verf. zeigt, daß die Antwort negativ ist, wenn $n \geq 3$ ist; für $n \leq 2$ ist sie wahrscheinlich positiv.

Doetsch (Freiburg i. Br.).

Weston, J. D.: The cardinal series in Hilbert space. Proc. Cambridge philos. Soc. 45, 335—341 (1949).

Die Klasse $L^2(-\infty, \infty)$, aufgefaßt als Hilbertscher Raum, heiße H_1 . Der Teilraum der ganzen Funktionen, deren Plancherelsche Fourier-Transformierten fast überall außerhalb $(-\pi, \pi)$ verschwinden, heiße H_3 . Nach Hardy [Proc. Cambridge philos. Soc. 37, 331—348 (1941)] ist H_3 ein Hilbertscher Raum, in dem die Folge $v_r(t) = \frac{\sin \pi(t-r)}{\pi(t-r)}$ für $t \neq r$, $= 1$ für $t = r$ eine normierte orthogonale Basis bildet. (Die sogenannten Kardinalreihen sind Entwicklungen der Form $\sum_{-\infty}^{\infty} f(a+rw) v_r\left(\frac{x-a}{w}\right)$ (a und w Konstante), die mit der Funktion $f(x)$ an den Stellen $a+rw$ übereinstimmen.) Verf. beweist über H_3 und die $v_r(t)$ neun Sätze, von denen die folgenden wiedergegeben seien. Satz 4: Die Menge aller reellen Translationen $f(t+\tau)$ von Funktionen aus H_1 bildet eine einparametrische stetige Gruppe von unitären Transformationen, gegenüber denen H_3 und sein orthogonales Kom-

plement invariant sind. Insbesondere ist $v_n(t + \tau) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} v_n(r + \tau) v_r(t)$. Satz 6.

Wenn $f(t)$ zu H_1 und $g(t)$ zu H_3 gehört, so gehört die Faltung $f * g = \sum_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(t-x)dx$ zu H_3 , wenn sie zu H_1 gehört. Insbesondere gehört $f * v_\tau$ für jedes reelle τ zu H_3 . Gehört $f(t)$ zu H_3 , so ist $f * v_\tau = f(t - \tau)$, also ist insbesondere $v_\sigma * v_\tau = v_{\sigma + \tau}$. Satz 8. Wenn $f(t)$ zu H_3 gehört, so besteht eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $f(t)$ orthogonal zu allen seinen ganzzahligen Translationen ist, darin, daß der Modul seiner Fourier-Transformierten in dem Intervall $(-\pi, \pi)$ fast überall konstant ist. Die ganzzahligen Translationen bilden dann zusammen mit $f(t)$ ein vollständiges Orthogonalsystem in H_3 . Satz 9. Verschwindet eine Funktion $f(t)$ aus H_3 für alle hinreichend großen ganzzahligen $|t|$, so ist $f(t)$ eine endliche lineare Kombination von Funktionen $v_r(t)$. — Für Anwendungen dieser Sätze auf die Theorie der Nachrichtenübermittlung siehe Verf., dies. Zbl. 32, 165.

Doetsch (Freiburg i. Br.).

Dowker, Yael Naim: A note on the ergodic theorems. Bull. Amer. math. Soc. 55, 379—383 (1949).

ρ and θ denote the polar coordinates of a point in the Euclidean plane E_2 , $x \neq \theta/2\pi$, c_n the circumference $\rho = 2^{-n}$, $n = 1, 2, \dots$; $S = \bigcup c_n$ is provided with the linear Lebesgue measure m . Each c_n is divided into $2n + 2$ arcs A_{nk} , $k = 1, 2, \dots, 2n + 2$ as follows: $A_{nk}: 2^{-k} \geq x \geq 2^{-(k+1)}$ for $k = 1, \dots, n$; $A_{n, n+1}: 2^{-(n+1)} \geq x \geq 0$; A_{nk} is the reflection of $A_{n, 2n+3-k}$ for $k = n + 2, \dots, 2n + 2$. T is the 1-1 point transformation of S into itself, which on A_{nk} is linear in x and carries A_{nk} onto $A_{n, k+1}$ for $k = 1, \dots, 2n - 1$, and A_{nk} onto A_{n1} for $k = 2n + 2$. T is measurable; $2^{-1} \cdot m(A) \leq m(TA) \leq 2m(A)$ for every measurable set A in S . The individual ergodic theorem holds because of the pointwise periodicity of T . Due to the Lipschitz property for T , $L_1(m)$ is transformed into itself. The mean ergodic theorem does not hold in $L_1(m)$; in fact for $\bar{f}(y) = 2^n$ on $A_{n, n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, $f(y) = 0$ everywhere else on S , the limit $\bar{f}^*(x)$ of the sequence of averages is seen to be equal to $2^n/(2n + 2)$ for y in c_n . By a suitable change in the division of the c_n , for T defined in the same way as before by patchwise linearity conditions, the individual ergodic theorem holds, $L_p(m)$ for $p > 1$ is transformed into itself; the mean ergodic theorem does not hold in $L_p(m)$.

C. Y. Pauc (Cape Town).

Povzner, A.: Über eine Klasse Hilbertscher Funktionenräume. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 68, 817—820 (1949) [Russisch].

Soient M un ensemble quelconque et H un espace de fonctions complexes définies sur M ; supposons H muni d'une structure d'espace de Hilbert telle que, pour tout $z \in M$, l'application $f \rightarrow f(z)$ soit une forme linéaire continue sur H ; on a alors $f(z) = (f, g_z)$ où g_z est un certain élément de H , qu'on peut considérer comme une fonction $g(v, z)$ définie sur $M \times M$. L'A. démontre que $g(v, z)$ est un noyau hermitien positif, que si u_n est une base orthonormale de H on a $g(v, z) = \sum u_n(v)u_n(z)$ que les g_z ($z \in M$) soutiennent tout H , et divers autres résultats du même genre. Comme cette Note ne contient aucune bibliographie, il ne sera peut être pas superflu de préciser que, selon toutes probabilités, tous les résultats qu'elle contient ont été démontrés depuis longtemps déjà par S. Bergmann et N. Aronszajn, au moins dans le cas particulier des espaces de fonctions analytiques (vois la „kernfunktion“ de S. Bergmann) qui, bien entendu, ne diffère en rien du cas „abstrait“ étudié ici.

R. Godement (Nancy).

Maak, Wilhelm: Moduln fast-periodischer Funktionen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 16_{3/4}, 56—71 (1949).

Soient G un groupe quelconque, \mathfrak{L} un ensemble de fonctions complexes définies sur G et possédant les propriétés suivantes: a) toute $f \in \mathfrak{L}$ est presque-périodique

(au sens de von Neumann); b) \mathfrak{L} est un espace vectoriel, fermé pour la convergence uniforme sur G ; c) \mathfrak{L} est invariant par les translations à gauche de G . Le but de l'A. est de prouver que l'on peut trouver dans \mathfrak{L} des sous-espaces invariants à gauche, minimaux et de dimension finie, linéairement indépendants, de telle sorte que la somme directe de ces sous-espaces soit partout dense dans \mathfrak{L} au sens de la convergence uniforme sur G . Pour cela, l'A. introduit d'abord dans \mathfrak{L} un produit scalaire bien connu — à savoir $M_x[f(x)\overline{g(x)}]$ — et une multiplication — à savoir $f \times g(x) = M_y[f(xy^{-1})\overline{g(y)}]$; d'après les hypothèses faites sur \mathfrak{L} , ce produit ne fait pas sortir de \mathfrak{L} ; par une méthode analogue à celle utilisée par E. Schmidt dans la théorie des équations intégrales, on montre tout d'abord que \mathfrak{L} contient au moins un sous-espace invariant minimal, lequel est nécessairement de dimension finie, d'où résulte le théorème. — Note du rapporteur: étant donné qu'il a été démontré par A. Weil (L'Intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Paris, Hermann, 1940) que les fonctions presque-périodiques sur un groupe quelconque se ramènent immédiatement à des fonctions continues sur un groupe compact convenable, le résultat contenu dans cet article est un cas particulier du suivant: toute représentation linéaire continue d'un groupe compact dans un espace de Banach E est „complètement réductible“ en ce sens que E est somme directe topologique de sous-espaces invariants minimaux de dimension finie, ce résultat étant lui-même une conséquence facile des formules de développement de Peter-Weyl. *Godement.*

Chalilov, Z. I.: Lineare singuläre Gleichungen in einem unitären Ring. Mat. Sbornik, n. S. 25 (67), 169—188 (1949) [Russisch].

Un anneau unitaire est une algèbre commutative (d'après l'A.; en fait, il est tout à fait important de ne pas faire cette hypothèse) sur le corps complexe, sur laquelle est définie un produit scalaire (x, y) (on ne suppose pas que l'espace pré-hilbertien correspondant soit complet) et une involution $x \rightarrow \bar{x}$ de telle sorte que l'on ait toujours $(x, yz) = (x\bar{y}, z)$; l'A. cite l'exemple suivant: soit L une courbe simple dans le plan complexe, dont les points sont repérés par un paramètre s , et soit R l'ensemble des fonctions complexes $f(s)$ définies sur L et vérifiant une condition de Hölder; R est un anneau unitaire si on y définit la multiplication de façon évidente et le produit scalaire par $(f, g) = \int_L f(s)\overline{g(s)} ds$. En fait, il existe bien d'autres

exemples importants d'anneaux unitaires (notamment dans les groupes localement compacts, ou dans la théorie des anneaux d'opérateurs); voir W. Ambrose (ce Zbl. 32, 356). Soit R un anneau unitaire avec élément unité; l'A. démontre d'abord que, pour qu'un opérateur vérifie les trois théorèmes de Fredholm, il faut et il suffit qu'il soit de la forme $W + V$ où W est inversible et V complètement continu; ceci étant, l'A. dit qu'un ensemble F d'opérateurs dans R est une „classe“ s'il possède les deux propriétés suivantes: a) F est une algèbre, et quels que soient $T \in F$, $x \in R$, F contient les opérateurs xT et Tx ; b) pour tout $T \in F$, $1 + T$ vérifie les théorèmes de Fredholm; les éléments de F sont alors dits réguliers. Un opérateur S est dit singulier (relativement à F) si $S^2 = 1$ et si, pour tout $x \in R$, l'opérateur $x \cdot S - S \cdot x$ est dans F ; S est dit correct relativement à F si $T \in F$ implique $ST \in F$ et $TS \in F$. Par exemple soit comme ci-dessus L une courbe simple fermée dans le plan complexe; soit R l'anneau des fonctions $f(s)$ vérifiant une condition de Hölder de la forme $|f(s) - f(t)| \leq A |s - t|^\alpha$ avec $0 < \alpha \leq 1$; soit F l'ensemble des opérateurs intégraux de la forme $Ff(s) = \int K(s, t) \cdot |s - t|^{-\alpha} \cdot f(t) dt$ où $\alpha < 1$ et où K vérifie une condition de Hölder: alors F est une classe; de plus, l'opérateur $Sf(s) = \frac{1}{\pi i} \int (t - s)^{-1} \cdot f(t) dt$ est singulier et correcte relativement à F . Le but principal de cet article est d'étudier les équations linéaires „singulières“ $Kx = y$ où K est un opérateur du type suivant: $Kx = ux + vSx + Tx$ (u, v éléments donnés de R ; T opérateur appartenant à une classe donnée F ; S opérateur

singulier et correct relativement à F), et à étendre à ces équations, moyennant des hypothèses simples et au moyen de procédés algébriques, les résultats de F. Noether [Math. Ann., Berlin 82, 42—63 (1921)]. *R. Godement (Nancy).*

Arens, Richard: Approximation in, and representation of, certain Banach algebras. Amer. J. Math. 71, 763—790 (1949).

L'A. dit qu'une algèbre normée complète A sur le corps R des réels est une algèbre BQ^* si elle admet un antiautomorphisme involutif $f \rightarrow f^*$ tel que ff^* soit dans le centre de A , et qu'on ait $\|f\|^2 \leq \|ff^* + gg^*\|$ si f et g sont permutables. Soit X l'ensemble des représentations continues de A dans le corps Q des quaternions; X , muni de la topologie de la convergence faible, est un espace compact. Pour tout $x \in X$, et tout $f \in A$, posons $f(x) = x(f)$; alors A peut être identifié à l'anneau des applications continues de X dans Q , telles que $f(0) = 0$, et que $f(\alpha x) = \alpha(f(x))$, pour tout automorphisme α du corps Q , αx désignant la représentation de A dans Q définie par $\alpha x(f) = \alpha(x(f))$; on a en outre $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ et $f^*(x) = (f(x))^*$ (pour tout quaternion a , a^* est le quaternion conjugué de a). Le point essentiel consiste à montrer que A contient toutes les fonctions considérées, ce que l'A. démontre en prouvant que pour chacune de ces fonctions g , et tout couple de points x, y de X , il existe $f \in A$ tel que $f(x) = g(x)$ et $f(y) = g(y)$ („biapproximation“); cela lui permet en effet d'appliquer des théorèmes généraux démontrés dans la première partie de son travail, qui généralisent les théorèmes d'approximation de Stone. L'A. donne un intéressant exemple prouvant qu'une algèbre BQ^* n'est pas toujours isomorphe à l'algèbre de toutes les applications continues d'un espace compact Y dans Q . Il montre que les idéaux fermés d'une algèbre BQ^* sont bilatères, stables pour l'antiinvolution $f \rightarrow f^*$ et les caractérise complètement en termes de sous-espaces de X ; il donne d'ailleurs un exemple d'idéal non bilatère (et non fermé) dans une telle algèbre. *J. Dieudonné (Nancy).*

Levitan, B. M.: Korrektur zur Arbeit „Verallgemeinerte Operationen der Verschiebung und unendliche hyperkomplexe Systeme“. Mat. Sbornik, n. S. 24 (66), 501—502 (1949) [Russisch].

Betrifft die in Mat. Sbornik, n. S. 17 (59), 9—44 (1945) erschienene Arbeit.

Day, Mahlon M.: Some characterizations of inner-product spaces. Trans. Amer. math. Soc. 62, 320—337 (1947).

Es handelt sich um das Problem der Charakterisierung derjenigen reellen oder komplexen linearen Räume B , in welchen sich ein inneres Produkt (b, b') , das den üblichen Postulaten genügt, so erklären läßt, daß eine in B vorhandene Norm $\|b\|$ in der üblichen Weise durch $\|b\|^2 = (b, b)$ dargestellt wird. Nach einem bekannten Kriterium von P. Jordan und J. von Neumann [Ann. Math., Princeton, II. S. 36, 719—723 (1935); dies. Zbl. 12, 307] hat B dann und nur dann diese Eigenschaft, wenn stets $\|b + b'\|^2 + \|b - b'\|^2 = 2\|b\|^2 + 2\|b'\|^2$ gilt. Dies zeigt, daß sich das Charakterisierungsproblem auf den zweidimensionalen Fall reduzieren läßt. Einem komplexen linearen Raum ordnet Verf. einen reellen linearen Raum normtreu zu, so daß auch eine Beschränkung auf den reellen Fall zulässig ist. — Ein zweidimensionaler reeller linearer Raum ist, wie bekannt, genau dann ein solcher mit innerem Produkt, wenn die Einheitssphäre (Menge der Elemente der Norm 1) eine Ellipse ist. Hierfür gibt Verf. zwei reizvolle Beweise. — Es werden zahlreiche weitere Charakterisierungen aufgewiesen, die sich auf Normrelationen, ferner auf Konvexitäts- und Orthogonalitätsbegriffe im Raum B beziehen. *H. Hadwiger (Bern).*

Colmez, J.: Sur divers problèmes concernant les espaces topologiques. — Les espaces à écarts. Problème de Wiener sur les transformations continues. Portugaliae Math. 6, 119—244 (1947).

Ce travail se divise en deux parties. Dans la première, l'A. étudie les espaces topologiques et uniformes au moyen d'„écarts“ de Fréchet, à valeurs dans des ensembles ordonnés; il étudie en particulier les espaces uniformes dont le filtre des entourages a une base totalement ordonnée, et montre que pour un tel espace E les voisinages de la diagonale dans $E \times E$ forment le filtre des entourages de la structure uniforme universelle. Il considère aussi les produits d'espaces de cette nature, ainsi que des généralisations de la notion de compacité au sens de Fréchet, où dans la définition il faut remplacer les suites dénombrables par des suites totalement ordonnées non dénombrables. — La seconde partie concerne le problème de Wiener, et donne les démonstrations des résultats annoncés dans des notes antérieures (v. Bonhoff et Colmez, ce Zbl. **31**, 128); nous renvoyons à l'analyse de ces Notes pour l'énoncé des principaux résultats. Parmi les méthodes utilisées dans les démonstrations, citons en particulier celle qui consiste à définir une topologie par l'ensemble des ultrafiltres convergents pour cette topologie, méthode que l'A. utilise avec profit.

J. Dieudonné (Nancy).

Praktische Analysis:

Friedman, Bernard: Note on approximating complex zeros of a polynomial Commun. pure appl. Math., New York **2**, 195—208 (1949).

Die Methode von Lin [J. Math. Physics, Massachusetts **20**, 231—242 (1941)] wird modifiziert und auf Teiler beliebigen Grades ausgedehnt: Wenn $f(x)$ ein reelles Polynom n -ten Grades ist, $g(x)$ ein Näherungsteiler m -ten Grades, so wird f zunächst durch g im gewöhnlichen Sinne dividiert, $f = Q \cdot g + R$, sodann f durch Q in dem Sinne, daß $S(x)$ in $f = g^* \cdot Q + S$ ein Polynom sein soll, das durch eine möglichst hohe Potenz von x teilbar ist, und $g^*(x)$ wird als erster verbesserter Näherungsteiler gewählt. — Die Konvergenzfrage wird für lineare und quadratische Teiler ($m=1$, $m=2$) vollständig behandelt. R. Schmidt (München).

Kneschke, A.: Theorie der genäherten Quadratur. J. reine angew. Math. **187**, 115—128 (1949).

Es wird eine Theorie der Quadraturformeln ohne Benutzung der Interpolationsrechnung gegeben. Gegeben seien $n+1$ Abszissen $x_0 < x_1 < \dots < x_n$; $P(x)$ sei ein Polynom m -ten Grades. Es sollen Koeffizienten $A_{q\sigma}$ bestimmt werden, so daß:

$$\int_{x_0}^{x_n} P(x) dx = \sum_{q=0}^n \{A_{q0} \cdot P(x_q) + A_{q1} \cdot P'(x_q) + \dots + A_{qk_q} P^{(k_q)}(x_q)\}$$

mit $k_q \leq m \leq n + \sum_{\mu} k_{\mu}$ für alle Polynome m -ten Grades gilt. Verf. zeigt, daß es genau ein solches Koeffizientensystem $A_{q\sigma}$ gibt, wenn man für die $A_{q\sigma}$ noch $n-m + \sum_{\mu=0}^n k_{\mu}$ lineare, voneinander unabhängige, aber sonst beliebige Zusatzbedingungen vorschreibt. Verwendet man in der obigen Formel an Stelle des Polynoms $P(x)$ eine beliebige stetige und $(m+1)$ mal stetig differenzierbare Funktion $f(x)$, so kommt ein Restglied hinzu:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \sum_{q=0}^n \sum_{\sigma=0}^{k_q} A_{q\sigma} f^{(\sigma)}(x_q) + \sum_{v=1}^n \int_{x_{v-1}}^{x_v} f^{(m+1)}(\xi) Q_v(\xi) d\xi,$$

wobei die $Q_v(\xi)$ gewisse von $f(x)$ unabhängige Polynome sind, die sich auch geschlossen angeben lassen:

$$Q_v(\xi) = \frac{(x_0 - \xi)^{m+1}}{(m+1)!} + \sum_{q=0}^{v-1} \sum_{\sigma=0}^{k_q} A_{q\sigma} \frac{(x_q - \xi)^{m-\sigma}}{(m-\sigma)!} \quad (v=1, \dots, n).$$

Besonderes Interesse bietet der Fall $m = n + \sum_{\mu=0}^n k_{\mu}$, weil dann für die $A_{q\sigma}$ die

Zusatzbedingungen fortfallen. Die Theorie läßt sich auf Funktionen $f(x, y)$ von zwei Veränderlichen übertragen, dabei werden im Rechteck $x_0 \leq x \leq x_n, y_0 \leq y \leq y_n$ die $(n+1)^2$ Gitterpunkte mit den Koordinaten $x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_n$ benutzt und dort die Werte:

$$\frac{\partial^{\sigma+s}}{\partial x^\sigma \partial y^s} f(x_q, y_r); \quad \begin{matrix} q, r = 0, \dots, n \\ \sigma, s = 0, \dots, k_q, k_r \end{matrix}; \quad k_q, k_r \leq m \leq n + \sum_{\mu} k_{\mu}$$

für eine Quadraturformel:

$$\int_{x_0}^{x_n} \int_{y_0}^{y_n} f(x, y) dx dy = \sum_{q,r=0}^n \sum_{\sigma=0}^{k_q} \sum_{s=0}^{k_r} A_{q\sigma} B_{rs} \frac{\partial^{\sigma+s}}{\partial x^\sigma \partial y^s} f(x_q, y_r) + Z$$

herangezogen. Für das Restglied Z wird eine Integralgestalt angegeben. Es werden als Beispiele die Boolesche, die Euler-Maclaurinsche und die Simpsonsche Quadraturregel als Spezialfälle aus der allgemeinen Formel hergeleitet und die entsprechenden Formeln für Doppelintegrale aufgestellt, wobei 4 bzw. 9 Gitterpunkte verwendet werden.

Collatz (Hannover).

Kuntzmann, Jean: Formules de quadrature approchée pour les fonctions continues à dérivée première continue et à dérivée seconde bornée. C. r. Acad. Sci., Paris 298, 38—40 (1949).

Ankündigung einer genäherten Quadraturformel, in der die Funktionswerte und die Werte der Ableitungen an den Zwischenstellen auftreten. *Heinhold*.

Salvadori, Mario: Sul calcolo degli autovalori mediante differenze finite ed estrapolazione. Atti. Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. 6, 181—183 (1949).

Bemerkungen zur Praxis der Ermittlung von Eigenwerten linearer Differentialgleichungen, anknüpfend an L. F. Richardson [The approximate solution by finite differences of physical problems involving differential equations, Philos. Trans. R. Soc., London, A. 210, 307—357 (1911)].

R. Schmidt (München).

Tranter, C. J.: The combined use of relaxation methods and Fourier transforms in the solutions of some three-dimensional boundary value problems. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 1, 281—286 (1948).

Die 1. Randwertaufgabe der Potentialtheorie mit der Gleichung

$$\nabla^2 V + f(x, y, z) = 0,$$

wobei die Werte von V auf der Oberfläche eines Zylinders der Länge π gegeben sind (Zylinderachse als z -Achse), wird durch Einführung der Fourierkoeffizienten:

$$\bar{V}(x, y, n) = \int_0^\pi V \cdot \sin nz \, dz$$

auf eine Folge ($n = 1, 2, 3, \dots$) von 1. Randwertaufgaben mit dem Zylinderquerschnitt als Bereich zurückgeführt. Diese Aufgaben werden näherungsweise, z. B. mit der Relaxation, gelöst und durch Fouriersynthese V aus den \bar{V} ermittelt. Zahlenbeispiel für einen Würfelbereich. Bei der 2. Randwertaufgabe werden die Größen:

$$\bar{V}(x, y, n) = \int_0^\pi V \cdot \cos nz \, dz$$

und bei einem halbbunendlichen Zylinder Fourierintegrale:

$$\bar{V}(x, y, \xi) = \int_0^\infty V \frac{\sin}{\cos} \xi z \, dz$$

verwendet.

Collatz (Hannover).

Fox, L.: The solution by relaxation methods of ordinary differential equations. Proc. Cambridge philos. Soc. 45, 50—68 (1949).

Southwells Relaxationsmethode entstammt der Statik der Baukonstruktionen. Durch sukzessives Relaxieren (Loslassen) der (an sich beweglichen) Knoten eines Stabwerkes gelingt es, die Zahl der Gleichungen und Unbekannten zu reduzieren und sich dem Ergebnis schrittweise zu nähern. Seiner mechanischen Deutung entkleidet, ist das Verfahren eine Iterationsmethode, die auf lineare Gleichungssysteme aller Art angewendet werden kann. In der Arbeit des Verf. werden gerade diese mathematischen Folgerungen gezogen, ohne dabei die physikalischen Anwendungen aus den Augen zu verlieren. Da diese in vielen Fällen auf Differentialgleichungen führen, die erst durch Differenzengleichungen (auf die relaxation dann angewendet werden kann) ersetzt werden müssen, so entsteht als ein neues Problem die Frage nach der Art, wie dieser Ersatz am besten vorgenommen wird: Rechenaufwand, Fehlerempfindlichkeit u.s.f. Verf. stellt allgemein fest, daß es für relaxation günstig ist, große Intervalle und vielgliedrige Differenzenausdrücke zu wählen, und zeigt den Rechnungsgang, außer an gewöhnlichen Differentialgleichungen erster, zweiter, vierter und dritter Ordnung, auch an einem einfachen Eigenwertproblem zweiter Ordnung, wobei der erreichte Genauigkeitsgrad (der sich beliebig steigern ließe) jeweils angegeben ist.

Marguerre (Darmstadt).

Southwell, R. V.: Relaxation methods applied to engineering problems. XIII. The flexure and extension of perforated elastic plates. Proc. R. Soc., London, A 193, 147—171 (1948).

Die Relaxationsmethode, um die sich in England eine ganze Schule gebildet hat (s. d. vor- und nachstehenden Referate), wird hier von Southwell selbst auf ein Problem angewandt, das den klassischen Methoden der Elastizitätstheorie unübersteigbare rechnerische Schwierigkeiten entgegensetzt: Biegung und Dehnung von Platten mit beliebig geformten Löchern. Das Hauptgewicht der Arbeit liegt dabei nicht auf der Relaxationsrechnung selbst (in dem Anwendungsbeispiel, dem Augenstab unter Zug, werden im wesentlichen nur die Resultate angegeben), sondern auf der ausführlichen Analyse des elastizitätstheoretischen Problems, das durch die Mehrdeutigkeit der gesuchten Funktion (Durchbiegung w beim Platten-, Spannungsfunktion χ beim Scheibenproblem) infolge der Höhlungen zusätzlich entsteht. Für die Anwendung der numerischen Methode gibt es keine Schwierigkeit, wenn die Löcher spannungsfrei sind, geringe, wenn Gleichgewichtsgruppen an jedem Loch wirken, große, wenn (wie in dem Beispiel) Gleichgewicht nur im ganzen herrscht. Zu zeigen, daß diese ohne Zuhilfenahme des Experimentes überwunden werden können, ist nicht zuletzt das Ziel der Arbeit.

Marguerre (Darmstadt).

Fox, L.: Mixed boundary conditions in the relaxational treatment of biharmonic problems (plane strain or stress). Proc. R. Soc., London, A 189, 535—543 (1947).

Biharmonische Probleme wurden mit der Relaxationsmethode von Southwell (iterative Auflösung algebraischer Gleichungssysteme, Differentialgleichungen werden durch Differenzengleichungen ersetzt) bisher nur bei einfachen Randbedingungen (Verrückungen oder Spannungen) untersucht. In dieser Arbeit wird der praktisch schwierigere Fall der gemischten Randbedingungen (Verrückungen und Spannungen) der Relaxationsmethode zugänglich gemacht. Es werden Einzelheiten über die Einarbeitung der gemischten Randbedingungen mit Differenzenmethoden gebracht. — Zwei Beispiele erläutern die Vorgehensweise. Zunächst wird eine quadratische Scheibe, die an zwei gegenüberliegenden Seiten durch senkrechte Zugkräfte (parabolischer Verlauf) beansprucht wird, behandelt. (Beispiel aus Timoshenkos Theory of elasticity.) Durch Umschreiben der zwei partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung und der Randbedingungsgleichungen in Differenzengleichungen wird ein Gleichungssystem erhalten, welches durch Relaxation gelöst wird. Das Ergebnis wird mit dem bei Timoshenko angegebenen verglichen. — Nicht geradlinig begrenzte Bereiche bringen weitere Schwierigkeiten, deren Behebung an einem zweiten Beispiel, einer

Kreisringscheibe, gezeigt wird. Es wird mit zwei verschiedenen Maschenweiten gearbeitet, wobei das verfeinerte Netz Ergebnisse liefert, die gut mit der analytischen Lösung übereinstimmen. — Bei den Untersuchungen wird eine Genauigkeit von 5% als ausreichend erachtet.

H. Unger (Darmstadt).

Fox, L.: Some improvements in the use of relaxation methods for the solution of ordinary and partial differential equations. Proc. R. Soc. London, A 190, 31—59 (1947).

Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen können mit der Relaxationsmethode von Southwell bearbeitet werden, wenn sich das Problem auf die Lösung eines simultanen algebraischen Gleichungssystems zurückführen läßt. Bei linearen Systemen ist diese Methode identisch mit der Gauß-Seidelschen Iteration. Zur Gewinnung der Gleichungssysteme werden die Differentialgleichungen in Differenzengleichungen umgeschrieben. Ersetzt man dabei einen Differentialquotienten durch Differenzenquotienten, so wird im allgemeinen nur der erste Term berücksichtigt, höhere Glieder werden vernachlässigt. Die vorliegende Arbeit zeigt eine Möglichkeit, die vernachlässigten Glieder nachträglich durch einen iterativen Prozeß zu berücksichtigen. Dieses Vorgehen hat mit der Relaxationsmethode an sich nichts zu tun, bringt aber für die damit behandelten Probleme Vorteile. Ersetzt man z. B. in $y'' + p(x)y = g(x)$ mit den Randbedingungen $y(0) = y(l) = 0$ die zweite Ableitung $h^2 y_i''$ durch die zweite zentrale Differenz, so werden die höheren Glieder $K(y_i) = -\frac{1}{12} \delta_i^4 + \frac{1}{90} \delta_i^6 - + \dots$ (dieser Ausdruck wird als Differenzenkorrektur bezeichnet) vernachlässigt. Das durch diese Approximation erhaltene Gleichungssystem liefert mit der Relaxationsmethode eine erste Näherung y_a . Damit kann $K(y_a)$ — allerdings meist nur das erste Glied — bestimmt werden. Nimmt man diese Korrektur als inhomogenen Teil des Gleichungssystems, so erhält man einen Zuschlag y_b . Aus $y_a + y_b$ wird eine verbesserte Differenzenkorrektur gebildet, die dann y_c liefert, usw. $y = y_a + y_b + y_c + \dots$ stellt dann eine Lösung dar, die den höheren Termen in der Differenzengleichung Rechnung trägt. Praktisch wird der Schritt h so gewählt, daß das Verfahren nach wenig Schritten zum Stehen kommt. — Durch dieses Vorgehen wird vermieden, daß man zur Erzielung hoher Genauigkeit viele Zwischenpunkte benötigt, was eine wesentliche Erschwerung der Lösung des Gleichungssystems mit sich bringt. — Die Methode wird auf acht Beispiele angewandt aus dem Gebiete der gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen. Es werden Rand- und Eigenwertprobleme behandelt, insbesondere auch solche mit nicht geradlinig begrenztem Randverlauf.

H. Unger (Darmstadt).

Bychovskij, M. L.: Grundlagen der mathematischen Elektronen-Maschinen mit diskreter Rechnung. Uspechi mat. Nauk 4, Nr. 3 (31), 69—124 (1949) [Russisch].

Verf. gibt eine eingehende Beschreibung der Einrichtung und Wirkungsweise derjenigen Rechenmaschinen, die rein elektrisch arbeiten und sich der diskreten Rechnung bedienen, also nur mit natürlichen Zahlen operieren, sowie eine Kennzeichnung der Vorzüge und Nachteile der Rechenmaschinen dieser Art gegenüber anderen. Im ersten Abschnitt werden die Elemente geschildert, aus denen in großer Anzahl die Maschinen und ihre Teile zusammengesetzt sind, das sind in der Hauptsache Schaltröhren verschiedener Art: Elektronen-Speicherzellen (Trigger), elektrische Ventile und Eingangsweichen. Im zweiten Abschnitt folgen die Zählhaltungen (Zählketten), die die Addition und Subtraktion ausführen, u. zw. verschiedene statische Typen (das sind solche, bei denen jeder einzelne Zählkreis durch seinen augenblicklichen elektrischen Zustand eine Ziffer repräsentiert und eine Änderung dieses Zustandes die Rechenoperation wiedergibt, der diese Ziffer unterworfen ist), je nachdem, ob die Zahlen im dekadischen oder im dyadischen System wiedergegeben werden oder in einem gemischten System, bei dem die Zahlen in dekadischer, ihre Ziffern aber in dyadischer Form dargestellt sind; ferner dynamische Typen, bei denen die Addition durch Überlagerung elektrischer Impulse geschieht. Im dritten Abschnitt folgt die Beschreibung verschiedener Arten von elektrischen Speicherwerken: statische Typen wie das Selekttron und die Elektronenstrahl-Speicherröhre, die Zahlen durch den jeweiligen elektrischen Zustand der Zellen auf ihren Schirmen speichern, und dynamische Typen; in denen Zahlen in Form von dauernd kreisenden elektrischen Impulsgruppen (mit Hilfe von Quarz-

Quecksilber-Verzögerungsketten) festgehalten werden, sowie Umsatzanordnungen, die die statische Darstellung einer Zahl in die dynamische überführen und umgekehrt. Im vierten Abschnitt wird das komplizierte Schaltschema zur Ausführung der Multiplikation auf elektrischem Wege (speziell für zweistellige Zahlen dekadischer Schreibung) auseinandergesetzt, das aus weit über 100 Elementen besteht (elektrische Multiplikationstabelle), sowie eine Bemerkung über die elektrische Ausführung der Division gemacht. Im fünften Abschnitt ist die Rede von der Vorrichtung zur automatischen Bedienung und Leitung des Rechenvorganges, die dafür zu sorgen hat, daß die Maschine die einzelnen Operationen in der erforderlichen Aufeinanderfolge ausführt, was dadurch geschieht, daß die einzelnen Teile jeweils im richtigen Moment das notwendige Kommando zur Ausführung in Form eines elektrischen Steuerimpulses erhalten. Die Vereinfachung und Rationalisierung dieser Einrichtung zur Verteilung der Kommandoserien zur Lösung einer bestimmten Rechenaufgabe stellt die aktuellste Aufgabe des Baues der modernen Rechenmaschinen der in Rede stehenden Art dar. Die Einrichtung kann auf dezentralisiertem oder zentralisiertem Wege erfolgen. Beide Typen werden geschildert: zuerst die halbautomatisch arbeitenden dezentralisierten Systeme, bei denen jeder Teil der Maschine vor Arbeitsbeginn auf die Ausübung der erforderlichen Rechenoperationen, die dann automatisch ablaufen, von Hand geschaltet wird und die zweckmäßig nur dann verwendet werden, wenn die Rechenaufgabe in der vielmaligen Wiederholung einzelner einfacher Rechenvorgänge besteht, wie es etwa bei der numerischen Integration einer Differentialgleichung erforderlich ist; sodann die zentralisierten Systeme, die im Prinzip darauf beruhen, daß eine Verwandlung der Steuerimpulse in Zahlen durch eine bestimmte Verschlüsselung vorgenommen wird, mit denen dann in der Maschine genau so wie mit gewöhnlichen Zahlen operiert wird und die später durch eine Dechiffrieranlage wieder in Steuerimpulse zurückverwandelt werden. Bei diesen Systemen wird also nicht nur der Rechenvorgang, sondern auch seine Bedienung automatisch ausgeführt. Es folgt noch die Schilderung der Kontrollvorrichtungen verschiedener Art, die die Richtigkeit der Arbeit der Maschine und des Ergebnisses verbürgen sollen und ebenfalls von der Maschine selbsttätig ausgeführt werden (bei einem Fehler bleibt die Maschine stehen). Z. B. wird die Neunerprobe zu diesem Zweck verwendet. Im letzten Abschnitt werden die Generatoren, die zur Erzeugung der notwendigen elektrischen Impulse dienen, geschildert, z. B. Multivibratoren verschiedener Typen und Blocking-Generatoren; ferner die Vorrichtungen, die die Einführung der Anfangsdaten in die Maschine und die Abnahme des Ergebnisses des Rechenvorganges mit Lochkarten oder Lochbändern oder ähnlichen Hilfsmitteln ausführen. Svenson (Heidelberg).

Goodwin, E. T. and J. Staton: Table of $\int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{u+x} du$. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 1, 319—326 (1948).

Die Werte des im Titel genannten Integrals $f(x)$ werden für die Argumente $x = 0, 0,02, 2, 0,05, 3, 0,01, 10$ auf vier Dezimalstellen tabuliert vorgelegt; als Schranke für die Ungenauigkeit der Tafelwerte wird 0,00006 angegeben. Asymptotische Entwicklung liefert für $x > 10$ die Darstellung

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^3} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right),$$

ausreichend für vier Dezimalstellen. — Das Eulersche Summierungsverfahren wird mit Erfolg angewendet, um die Genauigkeit von asymptotischen Entwicklungen zu verbessern. R. Schmidt (München).

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Féraud, L.: Induction amplifiante et inférence statistique. Dialectica, Neuchâtel 3, 127—152 (1949).

Nach Verf.s Meinung ist die bloße Angabe einer Wahrscheinlichkeitsverteilung bedeutungslos, solange sie nicht zu einem „vollständig ausgesprochenen Wahrscheinlichkeitsgesetz“ ergänzt wird. Dazu muß man zwei weitere Elemente einführen (die man frei wählen kann): eine (kleine) Wahrscheinlichkeit α , und eine Menge V , deren Wahrscheinlichkeit (in der gegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung) $\leq \alpha$ ist. So kommt man zur im voraus eindeutig bestimmten Anwendung des „Cournotschen Prinzips“: „ V ist praktisch unmöglich“. (Nach Verf. sind die

Ausgangswahrscheinlichkeiten — um jede inhaltliche Bedeutung zu vermeiden — nichts mehr als willkürliche Koeffizienten, die zum Zwecke dieser Endaussage dienen und durch deren Brauchbarkeit bestätigt werden.) — Die Problemstellungen der statistischen Schätzmethoden (Parameterschätzung; Annahme einer Hypothese) werden im Sinne dieser Gesichtspunkte erforscht. *Bruno de Finetti* (Trieste).

Mourier, Édith: *Sur l'espérance mathématique d'un élément aléatoire dans un espace de Banach.* C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 1300—1301 (1949).

Die Definition des Erwartungswertes $E(X)$ einer Zufallsveränderlichen X in einem metrischen und vollständigen vektoriellen (kurz B -)Raum ist mit der Definition des bestimmten Integrals der Funktionen mit in solchen Räumen liegendem Definitions- und Wertbereich äquivalent. Der zuerst von Fréchet 1944 gegebene Erwartungswert entspricht einem Spezialfall der 1933 von Bochner eingeführten Integraldefinition. Verf. stützt sich auf die Umschrift einer 1938 von Pettis (dies. Zbl. **19**, 417) angegebenen und die Bochnersche umfassende Integraldefinition folgendermaßen. Sei x^* ein Element des zu B konjugierten Raumes B^* aller linearen skalarwertigen Funktionen $x^*(X)$ innerhalb B . Sind letztere nach einem Wahrscheinlichkeitsmaß innerhalb der Mengen eines Borelschen Mengenkörpers meßbar, dann ist $x^*(X)$ eine skalare Zufallsveränderliche und $E[x^*(X)]$ im gewöhnlichen Sinne möglicherweise definierbar. Ist dies tatsächlich für alle $x^* \in B^*$ der Fall und gibt es ein $x \in B$ mit $x^*(x) = E[x^*(X)]$ für alle $x^* \in B^*$, so wird x ein Erwartungswert $E(X)$ von X genannt. Nach Angabe verschiedener Existenz- und Einzigkeitsbedingungen dieses — dann — linearen Erwartungswertes wird die charakteristische Funktion von einem X als die skalarwertige Funktion $E[e^{ix^*(X)}]$ für alle $x^* \in B^*$ definiert. In separierbarem B gilt das Gesetz: bei identisch verteilten unabhängigen X_n mit $E(|X_n|) < +\infty$ strebt das arithmetische Mittel der X_n schwach gegen $E(X)$, d. h. $x^*[(X_1 + \dots + X_n)/n] \rightarrow x^*(E(X))$ für alle $x^* \in B^*$. *Szentmártony*.

Blanc-Lapierre, A.: *Considérations sur l'analyse harmonique des fonctions aléatoires.* Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci., Nr. **13** (Lyon 28. 6. — 3. 7. 1948. Le calcul des probabilités et ses applications), 61—66 (1949).

Es bezeichne $X(t)$ eine, $\overline{X}(t)$ die konjugiert komplexe Zufallsfunktion mit endlicher Varianz $E|X(t)|^2$ und einer im Stieltjesschen (S) Sinne harmonisch zerlegbaren

Kovarianz $\Gamma(t_1, t_2) = E[X(t_1) \overline{X}(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(\nu_1 t_1 - \nu_2 t_2)} d^2 \gamma(\nu_1, \nu_2)$. Ferner $Y_k(t)$

die mit einem im Fourierschen (F) Sinne harmonisch zerlegbaren $R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu$

gebildete lineare Faltungstransformierte (Filtrierte) eines solchen $X_k(t)$. Sechs, teilweise mit R. Fortet veröffentlichte C. r. Acad. Sci. Paris-Noten aus den Jahren 1946—47 zusammenfassend, gibt nun Verf. die harmonische Zerlegung (Z) folgender

Funktionen an: 1. die bekannte S-Z von $X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \nu t} dx(\nu)$, 2. die FS-Z von

$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\nu) e^{2\pi i \nu t} dx(\nu)$, 3. die FS-Z von $E[Y_1(t_1) \overline{Y_2(t_2)}]$ bzw. von dessen zeit-

lichem Mittelwert $\lim_{T \rightarrow \infty} (2T)^{-1} \int_{-T}^T \dots dt$ je nachdem $\Gamma(t_1, t_2)$ nur von $t_2 - t_1$ ab-

hängt, also stationär ist, oder nicht, 4. die F-Z von $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T E[Y_1(t) \overline{Y_2(t - \tau)}] dt$, falls

$\gamma(\nu, \nu) = 0$ ist, sonst aber eine hinreichend reguläre Flächendichte besitzt, 5. die

FS-Z von l. i. m. $(T)^{-1} \int_{t-T}^t Y_1(\theta) \overline{Y_2(\theta - \tau)} d\theta$ bei weiter eingeschränktem X, Y_1, Y_2

mit Angabe von Bedingungen, unter welchen die Konvergenz fast sicher bzw. der Grenzwert seinem Erwartungswert gleich ist. In Verallgemeinerung des Cramér-(Loève)-schen Satzes über die Stationarität zweiter Ordnung wird schließlich eine notwendige und hinreichende Bedingung in bezug auf die bei 1. auftretende Belegungsfunktion $x(\nu)$ dafür angegeben, daß $X(t)$ in im Text erklärtem Sinne totalstationär von unendlicher Ordnung sein soll. *Szentmártony* (Budapest).

Baticle, Edgar: Sur une loi de probabilité a priori pour l'interprétation des résultats de tirages dans une urne. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 902—904 (1949).

Aus einer Urne, deren Inhalt aus m verschiedenen Sorten von Kugeln in der Zusammensetzung n_1, n_2, \dots, n_m , $\sum_{\nu=1}^m n_\nu = n$, besteht, wurden N Zufallsziehungen „mit Zurücklegen“ gemacht, bei denen $k < m$ Sorten von Kugeln mit den Indizes i, j, \dots, l und den Anzahlen N_i, N_j, \dots, N_l , $\sum_{\mu=i, j, \dots, l} N_\mu = N$, aufgetreten sind.

Verf. zeigt, daß, wenn das a posteriori-Wahrscheinlichkeitsgesetz für n, n_i, n_j, \dots, n_l die Form der bekannten Multinomialverteilung für N, N_i, \dots, N_l und die a priori-Verteilung, für jede Variable für sich genommen, die gleiche Form haben soll, das gemeinsame a priori-Verteilungsgesetz die Form $(A \, dn \, dn_i \, dn_j \cdots dn_l) / (n n_i n_j \cdots n_l)$ haben muß, wobei A eine Konstante ist. Entsprechend ergibt sich für die relativen Häufigkeiten $p_\mu = n_\mu/n$, $\mu = i, j, \dots, l$ als a priori-Verteilungsgesetz

$$(A \, dn \, dp_i \cdots dp_l) / (n p_i \cdots p_l).$$

Treten in der Stichprobe alle m Kugelsorten auf, so lautet dann das a priori-Verteilungsgesetz für die absoluten Häufigkeiten

$$(A \, dn \, dn_1 \, dn_2 \cdots dn_{m-1}) / (n n_1 n_2 \cdots n_m) \dots$$

und für die relativen Häufigkeiten $(A \, dn \, dp_1 \cdots dp_{m-1}) / (n p_1 \cdots p_m)$. — Für $m = 2$ ergibt sich danach das a priori-Verteilungsgesetz konst $\cdot dp/p(1-p)$, das bereits von Lhoste (Revue d'Artillerie 1923) und Dumas (Mémorial de l'Artillerie française 1948) empfohlen wurde.

Georg Friede (Göttingen).

Dumas, Maurice: Interprétation de résultats de tirages exhaustifs. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 904—906 (1949).

Für den Fall, daß sich bei n Ziehungen „ohne Zurücklegen“ aus einer Urne mit u_1 weißen und $u - u_1$ schwarzen Kugeln n_1 weiße Kugeln ergeben haben und $n_1(n - n_1) \neq 0$ ist, schlägt Verf. vor, für u_1 die a priori-Verteilung $u/\lambda u_1(u - u_1)$ mit $\lambda = \sum_{u=n_1}^{u=n+n_1} u/u_1(u - u_1)$ zu benutzen, um sowohl Wahrscheinlichkeitsaussagen über u_1 als auch über die Zahl t_1 der weißen Kugeln in t weiteren Ziehungen zu machen. Die sich damit ergebenden Wahrscheinlichkeitsausdrücke und Erwartungswerte werden besonders einfach. Beim Übergang zum Fall „mit Zurücklegen“ entspricht diesem a priori-Verteilungsgesetz die Verteilungsfunktion

$$(1/2 \log(1 - \varepsilon)/\varepsilon) (dp/p(1 - p))$$

für $\varepsilon < p < 1 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 0,5$ und 0 für p außerhalb dieser Grenzen. Dieses zu $dp/p(1 - p)$ proportionale Verteilungsgesetz wurde bereits mehrfach vorgeschlagen (vgl. vorsteh. Referat). Da das Integral $\int_0^1 dp/p(1 - p)$ unendlich wird, bezeichnet Verf. den Integranden als „virtuelles“ Gesetz. In einer Übersicht werden noch die entsprechenden virtuellen Gesetze für die Parameter der Gaußverteilung und des Poissongesetzes angegeben.

Georg Friede (Göttingen).

Borel, Émile: Remarques sur les notes de MM. Baticle et Dumas. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 906 (1949).

Zu den beiden vorsteh. besprochenen Arbeiten bemerkt Verf., daß er der klassischen von Bayes gegebenen Darstellung „treu“ bleiben will, nach der die Funktion

$\varphi(p)$, welche die a priori-Wahrscheinlichkeit definiert, die wesentliche Bedingung $\int_0^1 \varphi(p) dp = 1$ erfüllen muß. Jede andere Definition erscheint ihm nicht annehmbar. (Bem. d. Ref.: Die entgegengesetzte Ansicht vertritt H. Jeffreys in seinem Buch „Theory of probability“. 2. ed. Oxford 1948; dies. Zbl. 30, 165.) *Georg Friede.*

Loève, Michel: Sur l'équivalence asymptotique des lois. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 1335—1337 (1948).

Erste Skizze eines Versuches zur Erweiterung des zentralen Problems über das Grenzwgesetz von Zufallsveränderlichen $X_n = X_{n,1} + \dots + X_{n,n}$, und zwar bei möglichster Lockerung der Unabhängigkeitsbedingung bezüglich der Summanden. Hierbei erscheint es natürlich, Zufallsveränderlichen mit positiver Wahrscheinlichkeit im Unendlichen einzuführen und demgemäß die Verteilungsgesetze zweier Veränderlichensummen X_n, Y_n im vollständigen Sinn als asymptotisch äquivalent zu betrachten, d. h. dann, wenn die Differenz ihrer Verteilungsfunktionen bei $n \rightarrow \infty$ nicht nur an endlichen Stellen, sondern auch beim Grenzübergang ins Unendliche gegen Null strebt. Dementsprechend wird ein Stetigkeitssatz für verallgemeinerte Verteilungsfunktionen mit Hilfe ihrer charakteristischen Funktionen angegeben. Zwei Gruppen von hinreichenden Bedingungen sichern dann die vollständige asymptotische Äquivalenz der Verteilungsgesetze zweier Veränderlichensummen X_n, Y_n . Die Note ist inzwischen durch eine ausführlichere und in ihrer Bedeutung (dies. Zbl. 33, 290) bereits gewürdigte überholt worden. *Szentmártony.*

Prochorov, Ju. V.: Über das verstärkte Gesetz der großen Zahlen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 69, 607—610 (1949) [Russisch].

Die Mitteilung beschäftigt sich mit der Klarstellung der Bedingungen für die Anwendbarkeit des verstärkten Gesetzes der großen Zahlen auf eine Folge unabhängiger zufälliger Größen. Zunächst wird die notwendige und hinreichende Bedingung für das verstärkte Gesetz der großen Zahlen mit Hilfe der Wahrscheinlichkeit der Ungleichheit gewisser Summen zufälliger Größen formuliert (Theorem 1), sodann erhält Verf. eine Formulierung dieser notwendigen und hinreichenden Bedingung für den Fall der Verteilung der zufälligen Größen nach dem Gaußschen Verteilungsgesetz mit Hilfe der Dispersionstheorie als Folgerung aus dem Theorem 1 sowie auch eine hinreichende Bedingung von Kolmogoroff und ihre Verallgemeinerung durch Brunk (dies. Zbl. 30, 200). *Paul Lorenz (Berlin).*

Robbins, Herbert: The asymptotic distribution of the sum of a random number of random variables. Bull. Amer. math. Soc. 54, 1151—1161 (1948).

Verf. untersucht die Grenzverteilung einer Summe Y von N gleichverteilten unabhängigen zufälligen Variablen X_i , wenn auch N eine zufällige von den X_i unabhängige Variable ist. Dabei wird vorausgesetzt, daß $\Pr(N = k) = \omega_k(\lambda)$, wobei also die $\omega_k(\lambda)$ von einem Parameter λ abhängen. Es sei $E(N) = \alpha$, $E(N^2) = \beta^2$, $E[(N - \alpha)^2] = \beta^2 - \alpha^2 = \gamma^2$, $E(X_i) = a$, $E(X_i^2) = b^2$, $E[(X_i - a)^2] = b^2 - a^2 = c^2$. Dann ist $E(Y) = \alpha a$, $\sigma^2 = E[(Y - \alpha a)^2] = \alpha c^2 + \beta^2 \alpha^2$. Verf. zeigt, daß die Verteilung von Y für $\lambda \rightarrow \infty$ in den folgenden Fällen gegen die normale Verteilung strebt: 1. wenn $\sigma^2 \rightarrow \infty$, $\gamma = o(\sigma^2)$, $a^2 \gamma^2 = o(\alpha)$; 2. wenn $\sigma^2 \rightarrow \infty$, $\gamma = o(\sigma^2)$, und die Verteilung von N gegen die normale Verteilung strebt. Wenn aber $\sigma^2 \rightarrow \infty$, $\gamma = o(\sigma^2)$ und N eine nicht normale Grenzverteilung für $\lambda \rightarrow \infty$ hat, so ist die Grenzverteilung von Y nicht normal. *Bergström (Göteborg).*

Birnbaum, Z. W. und F. C. Andrews: On sums of symmetrically truncated normal random variables. Ann. math. Statist., Baltimore Md. 20, 458—461 (1949).

Für die Summe $S_a^{(m)}$ von m unabhängigen Zufallsvariablen X_a , deren jede der gleichen symmetrisch gestutzten (truncated) Normalverteilung

$$f_a(x) = C e^{-x^2/2} \text{ für } |x| \leq a, = 0 \text{ für } |x| > a$$

folgt, lösen Verff. näherungsweise die Aufgabe, die Begrenzung a so zu bestimmen, daß die Wahrscheinlichkeit $P(|S_a^{(m)}| \geq A)$ dafür, daß $|S_a^{(m)}| \geq A$ ist, gleich ε wird. Dabei werden die in der Abhandlung des erstgenannten Verf. (dies. Zbl. 31, 368) aufgestellten Sätze verwendet.

Georg Friede (Göttingen).

Noether, Gottfried E.: On a theorem by Wald and Wolfowitz. Ann. math. Statist., Baltimore Md. 20, 455—458 (1949).

Consider the chance variable $L_n = d_1 x_1 + \dots + d_n x_n$ where (d_1, \dots, d_n) is a sequence of real numbers and the domain of (x_1, \dots, x_n) consists of the $n!$ equally likely permutations of the elements of (a_1, \dots, a_n) . The author proves that L_n approaches a normal distribution as n increases, if

$$(1) \quad \frac{1}{n} \sum (h_i - \bar{h})^r / \left[\frac{1}{n} \sum (h_i - \bar{h})^2 \right]^{r/2} = O(1) \text{ and } \sum (a_i - \bar{a})^r / [\sum (a_i - \bar{a})^2]^{r/2} = o(1)$$

for $r = 3, 4, \dots$

He states that it can be shown that the a_i satisfy the latter condition with probability 1, if the chance variable Y , whose independent observations they are, has positive variance and a finite absolute moment of order 3. [Wald and Wolfowitz, in Ann. math. Statist., Baltimore Md. 15, 358—372 (1944) had proved that L_n was asymptotically normal when the a_i satisfied the same condition as given above for the d_i and that this will be the case with probability 1, if Y has positive variance and finite moments of all orders.]

S. Vajda (Epsom, England).

Chung, Kai-Lai: An estimate concerning the Kolmogoroff limit distribution. Trans. Amer. math. Soc. 67, 36—50 (1949).

Der Kolmogoroffsche Satz, nach welchem bei einer Gesamtheit mit stetiger Verteilungsfunktion $F(x)$ und bei einer aus ihr entnommenen n -gliedrigen Stichprobe mit der Verteilungsfunktion $F_n(x)$ sowie $d_n = \sup_{-\infty < x < \infty} |n(F_n(x) - F(x))|$ die Wahrscheinlichkeit

$$P(d_n \leq \lambda n^{1/2}) \Rightarrow \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j e^{-2j^2 \lambda^2}$$

bei konstantem λ , wird verallgemeinert und ergänzt. Und zwar insofern, als bei einer willkürlichen Konstante $A_0 > 0$ das λ gemäß $(A_0 \lg n)^{-1} \leq \lambda(n) \leq A_0 \lg n$ als veränderlich zugelassen und die Abweichung obiger Wahrscheinlichkeit von ihrem Grenzwert durch

$$A n^{-1/10} [1 + (\lg n)^{1/2} (\lambda^{-1}(n) + \lambda^{-2}(n))]$$

mit nur von A_0 abhängigem A abgeschätzt wird. — Der Beweis befolgt den von Kolmogoroff gegebenen. Der letzte Schritt benützt aber nicht einen allgemeinen Grenzwertsatz bezüglich der von Kolmogoroff angewendeten partiellen Differentialgleichung. Er stützt sich auf kombinatorische Überlegungen von Erdős und Kac einerseits und benützt von Esseen neulich geschaffene analytische Mittel andererseits. Dies erlaubt, sofort einen wesentlich allgemeineren Satz über Gitterverteilungen zu beweisen. Mit Hilfe des angegebenen Satzes gelingt es aber bereits z. B. den starken Satz zu beweisen, nach welchem bei $\lambda(n) \uparrow \infty$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß unendlich oft $d_n > \lambda(n) n^{1/2}$ sei, Null bzw. Eins ist, je nachdem $\sum_n e^{-2\lambda^2(n)} \lambda^2(n)/n <$ bzw. $= \infty$ ist. Unter anderem wird auch gezeigt, daß

$$P \left[\lim_{n \rightarrow \infty} d_n / (2^{-1} n \lg_2 n)^{1/2} = 1 \right] = 1 \text{ ist.}$$

Szentmártony (Budapest).

● Lévy, Paul: Processus stochastiques et mouvement brownien. Suivi d'une Note de M. Loève. Paris: Gauthier-Villars, Editeur 1948. 365 p. 3200 francs.

Die Monographie gibt größtenteils eine — bis 1945 zusammengefaßte — Darstellung der vom Verf. über additive Vorgänge und die Brownsche Bewegung zwischen 1934 und 1939 erhaltenen Resultate. Sie setzt einerseits des Verf. bekannte

Théorie de l'addition des variables aléatoires [Paris 1937; dies. Zbl. 16, 190] fort, reiht andererseits zwei Artikel des Verf. über die lineare bzw. ebene Brownsche Bewegung [Composito math., Groningen 7, 283—339 (1939); dies. Zbl. 22, 59 bzw. Amer. J. Math. 62, 487—550 (1940); dies. Zbl. 24, 139] in die allgemeine Theorie ein. Eine Verzögerung der Veröffentlichung ermöglichte aber die Berücksichtigung neuerer Untersuchungen insbesondere über stationäre Vorgänge und ihre harmonische Analyse. So schließt die Monographie auch mit einem erschöpfenden, klaren Bericht von M. Loève über Zufallsfunktionen von beschränkter Varianz bzw. Kovarianz und mit einem Literaturverzeichnis, welches die wichtigsten, bis Anfang 1948 erschienenen bezüglichen Veröffentlichungen enthält. Die Monographie ist bahnbrechend auf ihrem, in voller Entwicklung stehenden Gebiet und stellt demgemäß beträchtliche Forderungen an ihre Leser. Sie wird Uneingeweihten manche Schwierigkeiten, Eingeweihten, insbesondere Forschern, reiche Anregungen bieten.

Nach einer, die Grundbegriffe der Verteilungsgesetze sowie eine — zu knappe — Übersicht der abzählbaren Wahrscheinlichkeiten enthaltenden Einleitung behandelt Kap. I zwei Vorgänge als Beispiele: einen der linearen Brownschen Bewegung (bei der Einstein-Smoluchowskischen Annäherung) entsprechenden stetigen und einen unstetigen. Die Zuwächse $X(t_2) - X(t_1)$ der entsprechenden Zufallsfunktion $X(t)$ sind beim ersten nach dem Laplace-Gaußschen Gesetz mit der Streuung $\sqrt{t_2 - t_1}$, beim zweiten nach dem Poissonschen Gesetz mit der Streuung $\lambda(t_2 - t_1)$ verteilt. — Kap. II ist dem Begriff des allgemeinen Zufallsvorganges gewidmet. Leider nur auf Grund der Slutskyschen intuitiven Definition, nach welcher ein solcher Vorgang bei Kenntnis der Verteilung von $X(t_1), \dots, X(t_n)$ für alle n und $t_1 < \dots < t_n$ bestimmt ist. Die Unzulänglichkeit dieser Auffassung wird zwar durch Betonung der Notwendigkeit von erfüllten Kompatibilitäts- und asymptotischen Bedingungen sowie von Stetigkeitsbetrachtungen hinreichend klargestellt, es fehlt aber mindestens ein Hinweis auf die von Kolmogoroff, Khintchine, Doob, Ambrose und Kakutani angebaute maßtheoretische Richtung, die mehr als die hier versuchte heuristische verspricht. Im selben Sinne sind auch die Zufallsvorgänge bestimmenden Zufallsdifferential- bzw. Integrodifferentialgleichungen behandelt. — Abgklärter erscheint Kap. III über die Markoffschen Vorgänge sowie die Diffusion der Wahrscheinlichkeit. Es bringt nämlich nicht nur S. Bernsteins heuristische, sondern auch Kolmogoroffs strenge Methode, welche die Diffusionsgleichung aus der einleuchtenden Chapman-Kolmogoroffschen Integralgleichung ableitet und bei der Brownschen Bewegung z. B. auf die Wärmeleitungsgleichung führt. — Kap. IV ist den am besten durchforschten, im Khintchinesischen Sinne stationären Vorgängen und ihrer harmonischen Analyse gewidmet. Bei diesen sind die Erwartungswerte $E\{X(t)\}$, $E\{X(t)^2\}$ Konstanten und die Kovarianzfunktion $E\{X(t_1)X(t_2)\}$ ist nur von $|t_2 - t_1|$ abhängig. Die Grundlage bilden Khintchines klassische Ergebnisse (1934) und den Gipfelpunkt der von Cramér 1942 (und von Loève 1945 unabhängig wieder-)gefundene Satz, wonach die und nur die im quadratischen Mittel stetigen sowie im genannten Sinne stationären Vorgänge sich als Fourier-Stieltjesche Transformierten von Zufallsfunktionen mit orthogonalen Zuwächsen in getrennten Intervallen darstellen lassen. In diesem Kapitel gelangen die Überlegungen jüngerer französischer Forscher zur vollen Geltung. So findet man hier z. B. die von Blanc-Lapierre und Fortet bevorzugten, durch physikalische Vorstellungen belebten Filter, d. h. die linearen Faltungstransformationen und im Rahmen der stationären Zufallsfunktionen mehrerer Veränderlichen die Anwendung der höchst bemerkenswerten neueren Operatorentheorie von L. Schwartz. — Kap. V ist den additiven, d. h. solchen Vorgängen gewidmet, bei welchen die Zuwächse der entsprechenden Zufallsfunktionen über getrennten Intervallen unabhängig sind. Neben den Hauptergebnissen der eingangs erwähnten früheren Monographie des Verf. können als neue Zusätze des Verf. jüngste Ergebnisse über additive zyklische Vorgänge bzw. Vorgänge in euklidischen und nichteuklidischen Räumen betrachtet werden. Im engen Anschluß an diese werden Perrins schöne Ergebnisse über die rotatorische Brownsche Bewegung besprochen. — Kap. VI bzw. VII sind einer vertieften Untersuchung der linearen bzw. ebenen Brownschen Bewegung gewidmet. Bezüglich der linearen findet man eine große Zahl von Formeln, die sich auf die Verteilung verschiedener, mit der Zufallsfunktion $X(t)$, $X(0) = 0$ der Bewegung zusammenhängenden Funktionen bzw. ihrer Nullstellen beziehen. So z. B. den Satz, daß $Y_0(t) = |X(t)|$, $M(t) = \max_{0 \leq s \leq t} X(s)$, $Y_1(t) = M(t) - X(t)$, $-m(t) = \max_{0 \leq s \leq t} (-X(s))$, $Y_2(t) =$

$X(t) - m(t)$ dieselbe Verteilungsfunktion $P\{Y_0(t) < x\} = \sqrt{2/\pi t} \int_0^x e^{-\xi^2/2t} d\xi$ besitzen, oder

Khintchines Gesetz $P\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} X(t)/\sqrt{2t \log \log t} = 1\right\} = 1$ des iterierten Logarithmus. Bezüglich der ebenen Bewegung wird gezeigt, daß die Bahnkurve fast sicher überall dicht liegt und trotzdem

fast sicher das (Lebesguesche) Flächenmaß Null besitzt. Sie kehrt fast sicher in jede beliebige Umgebung jedes Punktes immer wieder zurück, während sie bereits im dreidimensionalen Raume fast sicher jeden beschränkten Bereich endlich verläßt. Da von der durch einen Bogen der Kurve und die entsprechende Sehne begrenzten Fläche im klassischen Sinne nicht gesprochen werden kann, wird der Begriff der Zufallsfläche und eine entsprechende Theorie der Zufallsintegrale angebahnt. Das Verteilungsgesetz dieser Fläche und Sehnenlänge kann durch eine elliptische partielle Differentialgleichung definiert werden. — Kap. VIII beschäftigt sich abschließend mit der Möglichkeit der Verallgemeinerung der linearen Brownschen Bewegung $X(t)$ mit eindimensionalem (Zeit-)Parameter t auf solche $X(\mathbf{t})$ mit mehrdimensionalem Parameter \mathbf{t} .

Szentmártony (Budapest).

• Arley, Niels: *On the theory of stochastic processes and their application to the theory of cosmic radiation*. New York: John Wiley and Sons, Inc. 1949. 240 p. 5 \$.

Statistik:

Pompilj, Giuseppe: *Sulla significatività delle costanti statistiche*. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 4, 112—117 (1949).

Zur Erhärtung der seit einem Jahrzehnt von C. Gini geübten und vom Verf. bereits in anderen Arbeiten mathematisch unterbauten Kritik an der logischen Berechtigung der stochastischen Zufallskriterien äußert Verf. Bedenken zu folgenden drei Fragen: I. Rückschluß von einem Stichprobenparameter auf den unbekannten entsprechenden Kollektivparameter; II. Beurteilung des Zufallscharakters empirischer Unterschiede; III. Entscheidung, ob ein Maß mit Zufallsfehlern behaftet ist oder die wahre Intensität des zu messenden Merkmals mißt. Ad I wiederholt Verf. Ginis Hauptargument, daß nämlich die nur auf Grund der Bayesschen Formel mögliche Bestimmung der Wahrscheinlichkeit a posteriori für einen bestimmten Kollektivparameterwert außer der Kenntnis der beteiligten bedingten Wahrscheinlichkeiten auch die der a priori-Wahrscheinlichkeitsverteilung des Kollektivparameters erfordert. Als Beispiel wird die Millotsche Bestimmung der Mutungsgrenzen im klassischen Falle des Rückschlusses von einer empirischen Häufigkeit auf die unbekannte Wahrscheinlichkeit angeführt. Ad III kritisiert Verf. im Anschluß an Gini die unbedenkliche Benutzung der von Gauß in seiner Theorie der Beobachtungsfehler postulierten Hypothese, daß das arithmetische Mittel der Zufallsfehler Null sei, mit Hilfe von Variablentransformationen, welchen gegenüber diese Eigenschaft nicht invariant ist.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Halphen, E.: *Quelques remarques sur le problème de l'estimation*. Colloques internat. Centre nat. Rech. sci., Nr. 13 (Lyon 28. 6. — 3. 7. 1948. Le calcul des probabilités et ses applications), 87—91 (1949).

Verf. übt Kritik an der modernen statistischen Methodik, insbesondere an der von R. A. Fisher für die Theorie der statistischen Schätzung und von Neyman für die Theorie der Testkriterien erstrebten und zum großen Teil durchgeführten Objektivierung und Systematisierung. Gegenüber diesem — für den Mathematiker typischen — Bestreben, durch Herausschälung umfassender einheitlicher mathematischer Prinzipien, auf welche Auswahl und Beurteilung der Methoden zurückgeführt werden, letztere von subjektiver Willkür zu befreien, betont Verf. die große praktische Bedeutung der persönlichen Intuition des Statistikers in der sachlich optimal angemessenen Behandlung der vorliegenden speziellen Frage. Zur Erhärtung seiner Ansicht führt Verf. einige Beispiele aus der Praxis der Schätzung, Prüfung von Hypothesen, Korrelationsrechnung, Ausgleichung, Stichprobenentnahme an.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Wald, Abraham: *Statistical decision functions*. Ann. math. Statist., Baltimore Md. 20, 165—205 (1949).

Da die Bedingungen, von denen Verf. in seiner grundlegenden Abhandlung (dies. Zbl. 29, 307) über eine allgemeine Theorie der statistischen Entscheidungsfunktionen ausgeht, bei praktisch wichtigen statistischen Problemen nicht immer

erfüllt sind, entwickelt Verf. in der vorliegenden Abhandlung seine Theorie mit neuen Beweismethoden getrennt für diskrete und kontinuierliche Zufallsvariable unter wesentlich weniger einschränkenden Bedingungen. Darüber hinaus gewinnt er unter ebenfalls wenig einschränkenden Bedingungen eine Reihe neuer Ergebnisse, von denen dem Nachweis der Existenz von Entscheidungsregeln, die eine Minimax-Lösung darstellen, d. h. durch eine minimale obere Grenze der zugehörigen Risikofunktion gegenüber allen anderen Regeln ausgezeichnet sind, besondere Bedeutung zukommt. Wie die obengenannte Abhandlung ist auch die vorliegende sehr abstrakt gehalten und geht auf praktische Anwendungen nicht ein. *Georg Friede.*

Lancaster, H. O.: The combination of probabilities arising from data in discrete distributions. *Biometrika*, Cambridge **36**, 370—382 (1950).

An numerischen Beispielen werden für den Fall der Prüfung einer hypothetischen Wahrscheinlichkeit auf Grund einer empirischen Häufigkeit (binomische Verteilung) sowie für den Fall des Vierfelderschemas (hypergeometrische Verteilung) die verschiedenen Methoden untersucht, die der Zusammenfassung mehrerer Testkriterien dienen, also einerseits bei normal verteilten Testvariablen additive Zusammenfassung von χ^2 -Ausdrücken, andererseits Fishers Transformation $\chi^2 = -2 \ln P$ der einzelnen Restwahrscheinlichkeiten P in χ^2 -Ausdrücke unter Ausnutzung von deren Additivitätseigenschaft. Bei dem ersten Verfahren erweist sich die Yates-Korrektur als unangebracht; hingegen sind die rohen χ^2 -Werte der einzelnen Tests zu addieren. Zur Erhöhung der Leistungsfähigkeit des Verfahrens empfiehlt Verf. an Stelle der Fisherschen Transformation die Addition „mittlerer“ bzw. einfacher zu berechnender „zentraler“ χ^2 -Ausdrücke, deren Erwartungswerte, wenn die Nullhypothese zutrifft, streng bzw. angenähert gleich den theoretischen sind.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Wald, Abraham: Note on the consistency of the maximum likelihood estimate. *Ann. math. Statist.*, Baltimore Md. **20**, 595—601 (1949).

Let $F(x, \theta)$ be a cumulative distribution function which is either discrete for all θ or absolutely continuous for all θ . $f(x, \theta)$ is then either the density or the elementary probability. The author shows, under conditions which are easily verifiable, that

$$\text{prob} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sup_{\theta \in \omega} f(X_1, \theta) \cdots f(X_n, \theta)}{f(X_1, \theta_0) \cdots f(X_n, \theta_0)} = 0 \right\} = 1$$

where ω is a closed subset of the parameter space, which does not contain the true parameter point θ_0 . It follows that $\text{prob} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \theta_0 \right\} = 1$, where θ_n is a function of the observations x_1, \dots, x_n such that

$$f(x_1, \theta_n) \cdots f(x_n, \theta_n) / f(x_1, \theta_0) \cdots f(x_n, \theta_0) \geq c > 0$$

for all n and for all x_i . Since a maximum likelihood estimate satisfies this equation with $c = 1$, the consistency is established, without assuming the differentiability of any of the expressions involved (so that not even the existence of the maximum likelihood equation is postulated). Finally the author mentions some possible extensions.

S. Vajda (Epsom, England).

Wolffowitz, J.: On Wald's proof of the consistency of the maximum likelihood estimate. *Ann. math. Statist.*, Baltimore Md. **20**, 601—602 (1949).

The au. remarks that Wald's proof (s. preceding review) uses a strong law of large numbers, whereas the consistency of the max. lik. solution is a weak property, since it refers to a distribution function rather than to an infinite sequence of observations. He shows how the result can be proved by using only the weak law of large numbers and how they can hence be extended to a larger family of chance variables than Wald's proof shows.

S. Vajda (Epsom, England).

Sobel, Milton and Abraham Wald: A sequential decision procedure for choosing one of three hypotheses concerning the unknown mean of a normal distribution. Ann. math. Statist., Baltimore Md. 20, 502—522 (1949).

Anwendung der von Wald eingeführten Sequenzteste (Sequential analysis. New York 1947; dies. Zbl. 29, 158) auf folgendes Entscheidungsproblem: Liegt der unbekannte Mittelwert θ einer mit bekannter Streuung σ normal verteilten Variablen x unterhalb von a_1 : ($\theta < a_1$, Hypothese H_1), im Intervall $a_1 \leq \theta \leq a_2$ (Hypothese H_2) oder oberhalb von $a_2 < \theta$ (Hypothese H_3), wobei $a_1 < a_2$ gegebene Konstanten sind? Um a_1 und a_2 werden gleich breite, bezüglich a_1 , a_2 symmetrisch gelagerte Indifferenzzonen $\theta_1 < a_1 < \theta_2 = \theta_1 + \Delta \leq \theta_3 < a_2 < \theta_4 = \theta_3 + \Delta$ abgegrenzt und auf jede Stichprobe x_1, \dots, x_n gleichzeitig zwei Sequenz-Teste R_1, R_2 angewandt:

$$\begin{array}{l} R_1 \left\{ \right. \\ R_2 \left\{ \right. \end{array} \quad \text{Ist } \sum_{j=1}^n x_j \quad \left\{ \begin{array}{ll} < \sigma^2 \log B/\Delta + a_1 n, & \text{so wird } H_1 \text{ akzeptiert,} \\ > \sigma^2 \log A/\Delta + a_1 n, & \text{so wird } H_1 \text{ abgelehnt,} \\ < \sigma^2 \log \hat{B}/\Delta + a_2 n, & \text{so wird } H_3 \text{ abgelehnt,} \\ > \sigma^2 \log \hat{A}/\Delta + a_2 n, & \text{so wird } H_3 \text{ akzeptiert,} \end{array} \right.$$

ist $\sigma^2 \log A/\Delta + a_1 n < \sum_{j=1}^n x_j < \log^2 \sigma \hat{B}/\Delta + a_2 n$, so wird H_2 akzeptiert.

Für jede Zahl $n = 1, 2, \dots$ wird die Gültigkeit der obigen Ungleichungen in der zugehörigen Stichprobe geprüft. Man entnimmt solange Proben, d. h. vermehrt n schrittweise, bis eine der Ungleichungen erfüllt, also eine Entscheidung erzwungen ist. Die Konstanten A, B, \hat{A}, \hat{B} , werden so bestimmt, daß die Wahrscheinlichkeiten für Fehler 1-ter bzw. 2-ter Art höchstens α bzw. β betragen. Für den Erwartungswert des zur Entscheidung notwendigen Stichprobenumfanges n werden untere und obere Grenzen angegeben.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Barankin, E. W.: Locally best unbiased estimates. Ann. math. Statist., Baltimore Md. 20, 477—501 (1949).

Let Ω be a space of points x and μ a measure defined in it. p_θ is a probability density in Ω with respect to μ . A function f_0 is an unbiased estimate of $g(\theta)$, if $\int_{\Omega} f_0 p_\theta d\mu = g(\theta)$. It is best at θ_0 , if (with $s > 1$ a chosen number)

$$\infty > \int_{\Omega} |f_0 - g(\theta_0)|^s p_{\theta_0} d\mu \leq \int_{\Omega} |f - g(\theta_0)|^s p_{\theta_0} d\mu$$

for all f which are unbiased estimates of $g(\theta)$. The author gives a necessary and sufficient condition for the existence of an unbiased estimate (the best one is then unique) and for the existence of only one unbiased estimate with finite s th absolute central moment. The cases $s = \infty$ and $s = 2$ are specially considered. The investigation is based on the concepts of Banach space, which are described in an appendix.

S. Vajda (Epsom, England).

Hansen, Morris H. and William N. Hurwitz: On the determination of optimum probabilities in sampling. Ann. math. Statist., Baltimore Md. 20, 426—432 (1949).

Consider a sampling plan where primary units are drawn for inclusion in the sample and then a sample of elements is drawn from this unit. Is is required to estimate the ratio

$$\frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{N_i} X_{ij}}{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{N_i} Y_{ij}}$$

where X_{ij} and Y_{ij} are the values of two characteristics of the j -th element within the i -th primary unit and N_i is the number of elements in it. A consistent estimate is constructed and those values (1) of the probability of selecting the i -th primary unit (2) of the number of primary units included in the sample and (3) of the probabi-

lity that an element will be included in the final sample, are determined, which minimize the variance of the estimate for a fixed cost of obtaining the sample, or alternatively those which minimize the cost for a fixed sampling error. Rules are also given for approximating the optimum probabilities.

S. Vajda (Epsom, England).

Wishart, John: Test of homogeneity of regression coefficients, and its application in the analysis of covariance. Colloques internat. Centre nat. Rech. sci., Nr. 13 (Lyon 28. 6. — 3. 7. 1948. Le calcul des probabilités et ses applications), 93—99 (1949).

Von zwei stochastischen Variablen y und x liegen je k i. a. korrelierte Stichproben p -gliedriger Sätze vor: y_{ij} , x_{ij} ($i = 1, \dots, k$; $j = 1, \dots, p$); jedes y_{ij} sei darstellbar als Summe

$$y_{ij} = c \cdot x_{ij} + A_i + B_j + m + \eta_{ij},$$

wobei die k_p Zufallsvariablen η_{ij} normal verteilt seien mit Mittelwert 0 und bezüglich der Stichproben konstanter Streuung, und c , A_i , B_j , m unbekannte Konstante bedeuten. Ferner seien die Quadrat- und Produktsummen der Abweichungen von den Stichprobenmittelwerten \bar{x}_i , \bar{y}_i mit

$$u_{ij} = \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_i)^2, \quad v_{ij} = \sum_j (x_{ij} - \bar{x}_i)(y_{ij} - \bar{y}_i), \quad w_{ij} = \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

bezeichnet. Die Homogenität der aus den k Stichproben auf Grund der Gleichungen

$$u_{ii} \cdot c_i - k^{-1} \cdot \sum_j u_{ij} \cdot c_j = v_{ii} - k^{-1} \cdot \sum_j v_{ij}$$

bestimmten Schätzungen c_i des gleichen, unbekannten Regressionskoeffizienten c prüft Verf. an Hand einer Varianzanalyse auf Grund der Tatsache, daß der Varianzenquotient

$$\frac{\sum_i u_{ii} \cdot (c_i - \bar{c})^2 - k^{-1} \sum_i \sum_j u_{ij} (c_i - \bar{c})(c_j - \bar{c})}{\sum_i (w_{ii} - u_{ii} c_i^2) - k^{-1} \sum_i \sum_j (w_{ij} - u_{ij} c_i c_j)}$$

der F -Verteilung mit $(k-1)$ und $[(k-1)(p-1)-k]$ Freiheitsgraden folgt, wo

$$\bar{c} = \left\{ \sum_i v_{ii} - k^{-1} \cdot \sum_i \sum_j v_{ij} \right\} / \left\{ \sum_i u_{ii} - k^{-1} \sum_i \sum_j u_{ij} \right\}$$

die aus dem Gesamtmaterial gewonnene Schätzung von c bedeutet. Dieses Resultat stellt eine Ausdehnung des von M. S. Bartlett [Proc. Cambridge philos. Soc. 30, 327—340 (1934); dies. Zbl. 10, 71] mit Hilfe der Kovarianzanalyse gegebenen Homogenitätstestes der Regressionskoeffizienten aus k untereinander unabhängigen Stichproben auf solche aus korrelierten Stichproben dar und entspricht im Falle einer einzigen Variablen y der zur Ausdehnung der gewöhnlichen Varianzanalyse auf korrelierte Stichproben eingeführten Komponente der Wechselwirkung (interaction).

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Bose, R. C.: A note on Fisher's inequality for balanced incomplete block designs. Ann. math. Statist., Baltimore Md. 20, 619—620 (1949).

In der für die landwirtschaftliche Forschung bedeutenden statistischen Versuchsplanung heißt ein ausgewogener, unvollständiger Block-Versuchsplan ein solcher mit v verschiedenen Behandlungen in b verschiedenen Blocks, bei welchem in jedem Block genau $k < v$ verschiedene Behandlungen angewandt werden, jede Behandlung in genau r und jedes Paar verschiedener Behandlungen in genau λ Blocks auftritt. Offenbar gelten die trivialen Gleichungen $bk = vr$, $\lambda \cdot (v-1) = r \cdot (k-1)$, $r > \lambda$. Die von R. A. Fisher [Ann. Eugenics, London 10, 52—75 (1940)] hergeleitete notwendige Ungleichung $b \geq v$ wird vom Verf. indirekt bewiesen durch Benutzung der

für $b \leq v$ aufstellbaren quadratischen Matrix

$$\begin{pmatrix} n_{11} & \dots & n_{1b} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n_{v1} & \dots & n_{vb} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

mit $n_{ij} = 1$ oder 0, je nachdem, ob Behandlung i im Block j auftritt oder nicht.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Moore, P. G.: A test for randomness in a sequence of two alternatives involving a 2×2 table. *Biometrika*, Cambridge 36, 305—316 (1950).

The hypothesis, that there is randomness within a sequence of ones and noughts is tested against the alternative that there is a dependence of the Markoff type. The investigation is based on the study of runs of 1s and 0s (cf. David, this Zbl. 29, 405) and is presented in the form of a 2×2 table whose entries are the frequencies of the four possible successions of 1s and 0s by 1s or 0s respectively. The author uses a continuous approximation to the probabilities that r_1 1s and r_2 0s form themselves into t runs and derives the power function. A connection with the χ^2 test for independence in a 2×2 table is also established. S. Vajda (Epsom, England).

Sillito, G. P.: Note on approximations to the power function of the „ 2×2 comparative trial“. *Biometrika*, Cambridge 36, 347—352 (1950).

Let P_i ($i = 1, 2$) be the probability that an individual possesses a given character and $f_i = r_i/n_i$ the proportion of individuals with this character observed in a random sample of n_i . It is known that $x_i = \arcsin \sqrt{f_i}$ is approximately normally distributed and $(x_2 - x_1)/\frac{1}{2} \sqrt{n_1^{-1} + n_2^{-1}}$ has unit variance. It can be used to test the hypothesis $P_1 = P_2$. — The au. uses this approximation to derive the power function of a 2×2 table and gives examples to show that his method gives good results; they are, in fact, often better than those obtained by Patnaik (this Zbl. 30, 314) whose procedure was based on an approximation to binomial and hypergeometric distribution by the normal distribution. S. Vajda (Epsom, England).

Hatke, Mary Agnes: A certain cumulative probability function. *Ann. math. Statist.*, Baltimore Md. 20, 461—463 (1949).

Verf. zeigt, daß sich an Stelle des Systems der Pearsonkurven die von I. W. Burr [Cumulative frequency functions. *Ann. math. Statist.*, Baltimore Md. 13, 215—232 (1942)] angegebene Verteilungsfunktion

$$F(x|c, k) = 1 - (1 + x^{1/c})^{-1/k}$$

für einen kleinen, aber praktisch wichtigen Ausschnitt aus dem Bereich der durch das System darstellbaren Verteilungen bequemer zur Darstellung von beobachtbaren Verteilungen verwenden läßt, wenn man die von ihr aufgestellten Tabellen der zu $F(x|c, k)$ für verschiedene c und k gehörenden ersten vier Momente benutzt. Aus diesen Tabellen lassen sich zu einer beobachtbaren Verteilung die Parameter c und k durch lineare Interpolation so bestimmen, daß die damit berechnete Verteilungsfunktion $F(x|c, k)$ mit ihr in den ersten vier Momenten übereinstimmt. Friede.

Chakrabarti, M. C.: On the moments of non-central χ^2 . *Bull. Calcutta math. Soc.* 41, 208—210 (1949).

Sind die Variablen x_1, x_2, \dots, x_n normal verteilt mit Mittelwerten m_1, \dots, m_n und gleicher Streuung σ , so folgt $\chi'^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2/\sigma^2$ bekanntlich der „nicht-zentralen“ χ^2 -Verteilung, die im Falle $\sigma = 1$ sich in der Form

$$p(\chi'^2) = \exp \{ -(\lambda + \chi'^2)/2 \} \cdot J_{(n-2)/2} (i\sqrt{\lambda}\chi')/2 (i\sqrt{\lambda})^{(n-2)/2} \quad \left(\lambda = \sum_{j=1}^n m_j^2 \right)$$

(J = Besselsche Funktion) darstellen läßt. Die Kumulanten

$$k_r = 2^{r-1} (r-1)! (n + r\lambda)$$

genügen der Rekursionsgleichung $k_r = 2(n + r\lambda) \cdot dk_{r-1}/d\lambda$. Für die Momente $\mu'_k = E(\chi'^{2k})$ ergibt sich die Rekursionsformel

$$\mu'_{k+1} = \{\lambda/(k+1)\} \cdot d\mu'_{k+1}/d\lambda + (n+2k)\mu'_k \text{ oder}$$

$$\mu'_{k+1} = \lambda^{k+1} + (n+2k)(k+1) \lambda^{k+1} \int_{\lambda}^{\infty} (\mu'_k/\lambda^{k+2}) d\lambda,$$

und hieraus für die Mittelwertsmomente

$$\mu_k = 2k(k-1) \lambda^k \int_{\lambda}^{\infty} [\{\mu_{k-1} + (n+\lambda)\mu_{k-2}\}/\lambda^{k+1}] d\lambda.$$

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Borel, Émile: Sur les sondages de l'opinion publique. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 933—935 (1948).

Einfache, sowohl die Auswahlmethode als auch die Fragestellung betreffende Einwendungen. Die Behauptung, daß ein bloßes Ziehungsverfahren jeder anderen Methode vorzuziehen sei, ist nicht richtig.

Bruno de Finetti (Trieste).

Biomathematik:

Malécot, C.: Les processus stochastiques de la génétique. Colloques internat. Centre nat. Rech. sci., Nr. 13 (Lyon 28. 6. — 3. 7. 1948. Le calcul des probabilités et ses applications), 121—126 (1949).

Verf. untersucht die Evolution der einem Allelenpaar A, a entsprechenden Gen- (bzw. Genotypen-) häufigkeiten einer Bevölkerung einerseits unter bloßer Einwirkung langsamer Selektion, andererseits unter zusätzlicher Einwirkung von Wanderung zwischen r Kolonien, in welche die Bevölkerung in jeder Generation zerlegt ist. Bei der ersten Fragestellung erfährt die Genwahrscheinlichkeit q beim Übergang zur Tochtergeneration, bis auf zu vernachlässigende Glieder 2-ter Ordnung, die Variation $\delta(q) = -uq + v(1-q) + q(1-q)(s+yq)$, wobei u, v der Mutation, das nicht lineare Glied der Selektion Rechnung trägt. Bei praktisch unendlich großer Bevölkerung gewinnt man hieraus die gesuchte Evolution durch Gleichsetzung der Gen-Häufigkeit mit der -Wahrscheinlichkeit in jeder Generation. In einer endlichen Bevölkerung hingegen ist die Genhäufigkeit g_{n+1} der $(n+1)$ -ten Generation eine stochastische Variable, die einer binomischen Verteilung auf Grund der Elementarwahrscheinlichkeit $q + \delta(q)$ in der n -ten Generation folgt. Die Variablen g_n bilden eine Markoffsche Kette, und die für ihre Verteilungsfunktion $\Phi(g, n)$ approximativ geltende Fokker-Plancksche Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial n} \Phi(g, n) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial g} \left(w(g) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial g} \right) - \delta(g) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial g}$$

läßt eine stationäre Grenzlösung zu. Die Betrachtung der Genwahrscheinlichkeiten in r getrennten, nur durch Wanderung verknüpften Kolonien führt auf einen r -dimensionalen Vektor $(g_1, \dots, g_i, \dots, g_r)$. Aus den ersten zwei Momenten der dem Übergang von der n -ten (g_i) zur $(n+1)$ -ten Generation (g'_i) entsprechenden Binomialverteilung von g'_i wird, wenn Selektion ausgeschlossen, mithin $\delta(q_i)$ eine lineare Funktion von q_i ist, ein lineares Gleichungssystem für die Momente 1-ter und 2-ter Ordnung der r -dimensionalen Simultanverteilung der g'_i gewonnen, welches für die stationäre Grenzverteilung $M(g_i) = v/(u+v)$ liefert, während die zweiten Momente seiner stationären Lösung nur unter zusätzlichen speziellen Annahmen (homogene Wanderung linear bzw. in zwei Dimensionen) berechnet werden.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Leslie, P. H.: Some further notes on the use of matrices in population mathematics. Biometrika, Cambridge 35, 213—245 (1948).

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung einer früheren Arbeit des Verf. [On the use of matrices in certain population mathematics, Biometrika, Cambridge 33, 183—212 (1945)]. Der Zweck der neuen Arbeit ist zuerst eine Ergänzung der früheren Arbeit

in einigen Punkten und in den weiteren Abschnitten, den Gebrauch von Matrizen und Vektoren auszudehnen auf den Fall des logistischen Typs des Wachstums einer Population sowie auf einen speziellen Typ der Beziehung zwischen zwei Populationen. Die Betrachtungen beschränken sich grundsätzlich auf den weiblichen Teil der Populationen. — Ausgangspunkt ist eine quadratische Matrix \mathfrak{A} , in der die erste Zeile enthält die Zahlen der Töchter von nach dem Alter geordneten weiblichen Individuen, die Subdiagonale unmittelbar unter der Hauptdiagonalen die Überlebenswahrscheinlichkeiten. Wie man zu dieser Matrix kommt, muß in der früheren Arbeit des Verf. nachgelesen werden. Mit Hilfe der üblichen Rechenverfahren für Matrizen gelingt es Verf., die Matrix \mathfrak{A} umzuformen in eine, deren charakteristische Gleichung für die weiteren Untersuchungen von entscheidender Bedeutung ist. Sie ermöglicht nämlich die Umformung der Ausgangsmatrix in eine solche, die unmittelbar den Altersaufbau der Population im stationären Zustande angibt. — Die Methode bedient sich grundsätzlich, soweit möglich, diskontinuierlicher Verfahrensweisen; sie sind dem Problem besser adaequat als kontinuierliche. Die Hauptdiskussionsthemen sind die konstante weibliche Geburtsrate, die biologische Deutung der Zeilenvektoren, die ursprünglich lediglich aus formalen Gründen in die Diskussion eingeführt worden sind, der totale Reproduktionswert einer Population, die Erweiterung der Diskussion auf den Typus des nach dem logistischen Gesetz begrenzten Wachstums einer Population, $\frac{dN}{dt} = (r - aA)N$, die unter verschiedenen Annahmen (1. konstante Fruchtbarkeit, 2. konstante Sterblichkeit) durchgeführt wird und schließlich die Beziehungen zwischen zwei sich gegenseitig bekämpfenden Populationen, unter weitgehend vereinfachenden Annahmen. Als Beispiel dienen von Gause gegebene Zahlen (1934) über Kulturen von *Paramecium caudatum* und *Paramecium aurelia*. Die gefundenen Beziehungen führen bei gewissen Anfangsbedingungen zu den Lotka-Volterraschen Differentialgleichungen. Obwohl die Integration der Beziehungen nicht gelungen ist, vermag Verf. doch interessante Folgerungen aus ihnen zu ziehen. Die Annäherung an den stationären Zustand erfolgt in gedämpften Schwingungen.

Paul Lorenz (Berlin).

Haldane, J. B. S.: The association of characters as a result of inbreeding and linkage. *Ann. Eugenics*, London 15, 15—23 (1949).

Verf. beweist, daß bei ungleichmäßiger Inzucht, d. h. wenn der Wrightsche Inzuchtskoeffizient f nicht bei sämtlichen Gliedern einer Bevölkerung gleich ist, für zwei ungekoppelte rezessive Gene die Häufigkeit der doppelt Homozygoten sowie der doppelt Heterozygoten gegenüber den einfach Homozygoten erhöht ist um einen der Varianz ($\bar{f}^2 - f^2$) von f in der Bevölkerung proportionalen Betrag; in noch stärkerem Maße tritt diese Erhöhung bei zwei gekoppelten Genen ein. Zum Beweise des letzteren Resultates benutzt Verf. Wahrscheinlichkeiten F_{XY} , die für zwei gekoppelte Loci A, a und B, b dem Wrightschen Inzuchtskoeffizienten f nachgebildet sind und sich bei vollständiger Koppelung mit diesem decken. F_{XY} sowie der Inzuchtskoeffizient des Genpaares, $\Phi_{XY} = F_{XY} - f_{XY}^2$, werden in Ermangelung einer der Wrightschen Formel für f analogen allgemein gültigen Formel für eine Reihe von speziellen Verwandtschaftsgraden berechnet. Diese Resultate erklären die empirisch bekannte Tatsache, daß bei partieller Inzucht unter Individuen, die bezüglich eines Erbfaktors rezessiv sind, Rezessive bezüglich anderer, sogar vom ersten Faktor unabhängiger, Erbfaktoren gehäuft auftreten.

M. P. Geppert.

Banerjee, K. S.: A note on weighing design. *Ann. math. Statist.*, Baltimore Md. 20, 300—304 (1949).

Es handelt sich um die Verwendung der Matrizenrechnung bei agrobiologischen Versuchen oder Wägungsaufgaben, wobei eine besondere Art des Vorgehens die analytische Behandlung erleichtert. In einem Sonderfall gelingt es, die Ausgangsmatrix auf einfache Weise, durch Rändern, zu orthogonalisieren.

P. Lorenz.

Geometrie.

Grundlagen. Nichteuclidische Geometrie:

Bernays, Paul: Bemerkungen zu den Grundlagen der Geometrie. Studies Essays, pres. to R. Courant, 29—44 (1948).

Die Arbeit besteht aus zwei unabhängigen Teilen. Der erste Teil „Zur axiomatischen Charakterisierung der Symmetrie in der Geometrie der Ebene“ gehört dem Gedankenkreis des Anhangs II von Hilberts „Grundlagen der Geometrie“ (7. Aufl. 1930) an. Es wird ein Beweis für einen Satz des Verf. gegeben, der ohne Beweis bereits a. a. O. S. 134 und in Hilberts Gesammelten Abhandlungen II, 1933, S. 411f. angegeben ist. Man betrachte die Hilbertschen Axiome I 1—3 der ebenen Inzidenz, II der Anordnung, III der Kongruenz, einschließlich des Axioms III 6 von der Transitivität der Winkelkongruenz. Schränkt man das Dreieckskongruenzaxiom III 5 auf den Fall gleichsinnig zugeordneter Dreiecke ein — dies eingeschränkte Axiom wird als III 5* bezeichnet —, so ist bekanntlich der Satz von der Kongruenz der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck nicht mehr beweisbar. Es entsteht die Frage, ob man umgekehrt aus dem eingeschränkten Axiomensystem und dem Basiswinkelsatz auf das volle Axiom III 5 schließen kann. Soweit man weiß, gelingt dies nicht ohne eine weitere axiomatische Annahme. Der hier bewiesene Satz von Bernays besagt: Aus den Axiomen I 1—3, II, III 1—4, 5*, 6, dem zusätzlichen Kongruenzaxiom III 7 „Ein Winkel kann nicht in einem kongruenten mit demselben Scheitel liegen“ und dem Basiswinkelsatz folgt das volle Axiom III 5. — Der zweite Teil „Über ein Eichmaß im erweiterten Sinne“ handelt von der Tragweite gewisser elementargeometrischer Konstruktionsprozesse, im wesentlichen der Einschiebungen, in der euklidischen Ebene. Als einziges Instrument wird ein „*e*-Lineal“ gedacht, ein Lineal, auf dem durch zwei Marken eine Einheitsstrecke markiert ist. Es darf als Lineal zum Verbinden gegebener Punkte und Schneiden gegebener Geraden und als Hilbertsches Eichmaß zum Abtragen der Einheitsstrecke verwendet werden; außerdem soll es erlaubt sein, das *e*-Lineal so zu stellen, daß das eine Ende der markierten Strecke auf einen gegebenen Punkt, das andere auf eine gegebene Gerade fällt, und ferner auch so, daß die Enden der markierten Strecke auf zwei gegebenen Geraden liegen, während zugleich die Linealkante durch einen gegebenen Punkt außerhalb der beiden Geraden geht (Einschiebung der Einheitsstrecke zwischen zwei Geraden). Es ist bekannt, daß sich mit Hilfe der Einschiebungen die Einschaltung zweier mittlerer Proportionalen zwischen die Einheitsstrecke und eine beliebige gegebene Strecke und die Dreiteilung des Winkels ausführen lassen. Der Koordinatenbereich der mit dem *e*-Lineal bei Vorgabe eines Koordinatensystems mit der Strecke des *e*-Lineals als Einheitsstrecke konstruierbaren Punkte wird charakterisiert als derjenige Körper Ω_1 , der von der 1 aus erzeugt wird durch die rationalen Operationen, die reellen Radikale $\sqrt[c]{c}$ ($c > 0$) und $\sqrt[3]{c}$ sowie die der Winkeltrisektion entsprechende Bestimmung der positiven Wurzel von $x^3 - 3x = 2c$ ($0 < c < 1$). Jede reelle Wurzel einer kubischen Gleichung mit Koeffizienten aus Ω_1 gehört diesem Körper an. Zum Schluß wird die Frage aufgeworfen, ob der Bereich Ω_1 eine Erweiterung erfährt, wenn der Zirkel hinzugenommen und Einschiebungen auch zwischen Gerade und Kreis oder zwischen zwei Kreisen zugelassen werden.

Bachmann (Kiel).

Gruner, W. und R. Stettler: Eine Bemerkung zum Axiom von Pasch in Hilberts „Grundlagen der Geometrie“. Elemente Math., Basel 5, 17—18 (1950).

Sperner, Emanuel: Konvexität bei Ordnungsfunktionen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 16_{3/4}, 140—154 (1949).

Bereits in zwei vorangehenden Arbeiten [dies. Zbl. 30, 60; 32, 177, 178 und S.-B. Heidelberger Akad. Wiss. math.-naturw. Kl. 1949, 413—448] hat der Verf. geome-

trische Anordnungsbeziehungen untersucht, die durch Ordnungsfunktionen mit „Hyperebenenrelation“ induziert werden. Eine Ordnungsfunktion $h(\alpha)$ definiert für jede Hyperebene h zwei Seiten, die Menge der Punkte α mit $h(\alpha) = +1$ und die der Punkte mit $h(\alpha) = -1$. In der vorliegenden Mitteilung wird für die n -dimensionalen affinen Geometrien über beliebigen, nicht notwendig kommutativen Körpern die Frage untersucht, bei welchen Ordnungsfunktionen die beiden Seiten jeder Hyperebene konvex sind, d. h. mit zwei Punkten α und β alle die Punkte enthalten, die (im Sinne der von der Ordnungsfunktion induzierten Zwischenbeziehung) zwischen α und β liegen. Eine solche Ordnungsfunktion wird „konvex“ genannt. Es wird wiederum Gebrauch gemacht von der Korrespondenz zwischen den Klassen von Ordnungsfunktionen und den Halbordnungen des Koordinatenkörpers, die der Verf. in der ersten zitierten Arbeit ausführlich untersucht hat; jedoch ergeben sich einige Modifikationen, da jene Arbeit sich auf die projektiven Geometrien bezog. Die Ordnungsfunktionen, die nach der bereits in der vorangehenden Arbeit verwendeten Erzeugungsvorschrift aus den Halbordnungen des Koordinatenkörpers hervorgehen, werden als „normal“ bezeichnet; die triviale Halbordnung möge ausgeschlossen bleiben. Es wird gezeigt: Eine normale Ordnungsfunktion ist dann und nur dann konvex, wenn sich die Addition bei der zugehörigen Halbordnung monoton oder antimonoton verhält, d. h. wenn aus $a > 0$, $b > 0$ entweder stets $a + b > 0$ oder stets $a + b < 0$ folgt. Die einzige Halbordnung mit antimonotoner Addition ist die des Primkörpers der Charakteristik 3, und, von diesem Sonderfall abgesehen, hat also die Existenz normaler konvexer Ordnungsfunktionen die volle Anordenbarkeit des Koordinatenkörpers zur Folge. — Anschließend wird ein einfaches Kriterium dafür angegeben, daß eine Ordnungsfunktion „normkonvex“ ist, d. h. daß die zur gleichen Klasse gehörenden normalen Ordnungsfunktionen konvex sind. Hierbei wird gezeigt, daß eine Ordnungsfunktion dann und nur dann normal ist, wenn zwei Punkte niemals auf verschiedenen Seiten einer zu ihrer Verbindungsgeraden parallelen Hyperebene liegen, und daß sich zu einer Ordnungsfunktion eine normale Ordnungsfunktion der gleichen Klasse ohne den Umweg über die Halbordnungen direkt und explizit angeben läßt.

Bachmann (Kiel).

● Kaufmann, Karl: Gewebetheoretische Untersuchungen zur Axiomatik der dreidimensionalen affinen Geometrie. (Promotionsarbeit.) Zürich: Juris Verlag 1949. 41 S.

K. Reidemeister hat in seinen Grundlagen der Geometrie, Berlin 1930, die ebene affine Geometrie auf gewebegeometrische Betrachtungen aufgebaut. Verf. behandelt die gleiche Aufgabe für den Raum. Sind in einem abstrakten Flächen-4-Gewebe zwei Diagonalfächenscharen vorhanden, so läßt sich zu dem Gewebe eine Gruppe finden, derart daß die Punkte durch geordnete Tripel von Gruppenelementen (x_1, x_2, x_3) dargestellt werden und $x_i = \text{konst.}$ drei der Scharen, $x_1 x_2 x_3 = \text{konst.}$ die vierte darstellt. Die Gruppe ist dann und nur dann kommutativ, wenn auch die dritte Diagonalfächenschar vorhanden ist; dazu genügt es, wenn eine Fläche dieser Schar sich bilden läßt. Sind mit dem Gewebe zwei weitere Flächenscharen in geeigneter Weise verknüpft, so kann man zu der obigen Addition in entsprechender Weise eine Multiplikation erklären, dem Assoziativgesetz und den Distributivgesetzen entsprechen dann im Gewebe das Vorhandensein weiterer Diagonalfächenscharen. Um das rechtsseitige Distributivgesetz in dieser Weise zu deuten, muß allerdings ein einparametrisches System weiterer Flächenscharen herangezogen werden. Sind diese Bedingungen sämtlich erfüllt, so kann man das Gewebe zu einer affinen Geometrie über einem Schiefkörper erweitern. — Für die Kommutativität des Körpers gibt Verf. eine interessante räumliche Deutung: sind die Geraden α_i , $i = 1, 2, 3$, zur Ebene a parallel, die Geraden β_k , $k = 1, 2, 3$, zur Ebene b , so ist der Körper dann und nur dann kommutativ, wenn aus dem Vorhandensein von

acht Schnittpunkten $\alpha_i \times \beta_k$ stets das des neunten folgt. Er zeigt auch geometrisch die Gleichwertigkeit dieser Schließungseigenschaft mit dem Pascalschen Satz.

Bol (Freiburg).

Baer, Reinhold: The infinity of generalized hyperbolic planes. Studies Essays, pres. to R. Courant, 21—27 (1948).

The author considers a projective plane P (not necessarily Desarguesian) provided with a polarity [Bull. Amer. math. Soc. **52**, 77—93 (1946)] and a division of its elements (points and lines) into three mutually exclusive and exhaustive classes which he terms: interior, absolute and exterior. These concepts are substantiated by a system of postulates. The interior elements form the generalized hyperbolic plane. Two examples of generalized hyperbolic planes are given: $P_1(P_2)$ is the projective plane over the field of complex numbers (quaternions). The polarity is defined by means of the Hermitian form $x_0 \bar{y}_0 + x_1 \bar{y}_1 - x_2 \bar{y}_2$. A point (x_0, x_1, x_2) is called interior, absolute or exterior according as $x_0 \bar{x}_0 + x_1 \bar{x}_1 - x_2 \bar{x}_2$ is negative, zero or positive. The main object of the present note is the proof of the following theorem: There exist interior points and interior lines and every interior line carries an infinity of interior points. Essential use is made of previous results [see paper mentioned above and Bull. Amer. math. Soc. **51**, 903—609 (1945)]. C. Y. Pauc.

Pickert, Günter: Elementare Behandlung des Helmholtzschen Raumproblems. Math. Ann., Berlin **120**, 492—501 (1949).

Es wird eine klare und einfache Fassung des Helmholtzschen Raumproblems für den reellen Vektorraum gegeben. Im dreidimensionalen Raum der Vektoren mit reellen Komponenten braucht für eine Gruppe G homogener linearer Transformationen nur das Axiom der „freien Beweglichkeit“ und eine Eindeutigkeitsaussage gefordert zu werden, um G als Bewegungsgruppe zu kennzeichnen. Es genügt nämlich, zu verlangen, daß es zu irgend zwei Paaren linear unabhängiger Vektoren a, b und c, d stets eine lineare Transformation σ in G gibt, für die $\sigma(a) = rc$, $\sigma(b) = sc + td$ mit geeigneten $r > 0, t > 0$ und $s \geq 0$ gilt; ist hierin $a = c, b = d$, so sei die Identität das einzige σ der verlangten Art in G . Dann zeigt sich, daß G notwendig aus denjenigen linearen Transformationen positiver Determinante besteht, die eine positiv-definite quadratische Form ungeändert lassen. Im n -dimensionalen Vektorraum ($n > 3$) ist die Eindeutigkeitsaussage durch die Forderungen, daß eine in sich übergehende Halbgerade punktweise festgelassen wird und nur die Identität eine Hyperebene punktweise festläßt, zu ersetzen. Der Fall $n = 2$, für den ein Gegenbeispiel gegeben wird, bleibt offen. Die Beweise sind durchweg elementar; infinitesimale Transformationen werden nicht benutzt. Sperner (Bonn).

Elementargeometrie:

Sandham, H. F.: A generalization of Feuerbach's theorem. Amer. math. Monthly **56**, 620—622 (1949).

Der Feuerbachsche Satz, daß der Feuerbachsche Kreis den Inkreis und die drei Ankreise des Dreiecks berührt, ist von W. S. McCay dahin verallgemeinert worden, daß der Feuerbachsche Kreis den Fußpunktkreis zweier Winkelgegenpunkte (oder „isogonal-konjugierter“ Punkte) berührt, wenn diese Punkte mit dem Umkreismittelpunkt in einer geraden Linie liegen. Von diesem Satz beweist Verf. folgende Verallgemeinerung: Der Winkel zwischen dem Feuerbachschen Kreis und dem Fußpunktkreis zweier Winkelgegenpunkte ist gleich dem Winkel zwischen den Verbindungsgeraden dieser Punkte mit dem Inversen eines von ihnen bezüglich des Umkreises.

Zacharias (Quedlinburg).

Maxwell, E. A.: Some properties of the nine-points circle. Math. Gaz., London **31**, 266—269 (1947).

Sind H_1, H_2, H_3 die Höhenfußpunkte des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ und sind $k = 0$

bzw. $k_i = 0$ die Gleichungen des Feuerbachschen Kreises bzw. der Kreise $A_i H_j H_k$, so kann die Gleichung mancher mit dem Dreieck verbundener Geraden und Kreise als lineare Komposition der angegebenen Gleichungen ausgedrückt werden, wodurch einige bekannte Sätze der Dreiecksgeometrie sich einfach beweisen lassen. *Hajós*.

Pi Calleja, Pedro: Über die Geometrie des Dreiecks. *Math. Notae, Bol. Inst. Mat., Rosario* 8, 112—129 (1948) [Spanisch].

Es handelt sich um die Lösung folgender, von V. Uspensky gestellten Aufgabe: In einem Dreieck ABC durch eine Ecke C eine Eckenlinie t derart zu ziehen, daß die Inkreise der beiden Teildreiecke gleiche Radien haben. Verf. findet durch eine elementare Methode mit Hilfe von Vektoren $t = \sqrt{p(p-c)}$, wo $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ zu setzen ist. Eine zweite Lösung benutzt den Stewartschen Satz, eine dritte ist trigonometrisch. Endlich führt eine projektive Methode zu der Lösung der allgemeineren Aufgabe, die verlangt, daß die beiden Radien in einem gegebenen, von 1 verschiedenen Verhältnis stehen. Die nicht projektiven Methoden des Verf. führen in diesem Fall zu weniger einfachen Lösungen. *Zacharias (Quedlinburg)*.

Ferrari, Enrique: Verallgemeinerung desselben Problems. *Math. Notae, Bol. Inst. Mat., Rosario* 8, 130—133 (1948) [Spanisch].

Verf. gibt eine mehr elementare Lösung derselben Aufgabe (s. vorsteh. Referat) die sich gleicherweise der ursprünglich gestellten Aufgabe wie auch der Verallgemeinerung (Radien in gegebenem, von 1 verschiedenen Verhältnis) anpaßt.

Zacharias (Quedlinburg).

Thébault, V.: Theorem on the trapezoid. *Amer. math. Monthly* 54, 537—538 (1947).

Elementargeometrischer Beweis folgenden Satzes: Sind für das Trapez $ABCD$ (mit $AD \parallel BC$) die Punkte E und F derart gewählt, daß $AE \parallel FC$ und $BE \parallel FD$, so ist der mit AD und BC parallel gemessene Abstand des Punktes E von CD gleich dem des Punktes F von AB .

G. Hajós (Budapest).

Thébault, Victor: Sur de nouveaux points du tétraèdre. *C. r. Acad. Sci., Paris* 227, 754—755 (1948).

In dem Tetraeder $T \equiv ABCD$ seien a, a', b, b', c, c' die Kanten BC, DA, CA, DB, AB, DC , und A, B, C, D die Inhalte der Dreiecke BCD, CDA, DAB, ABC . Die neuen Punkte sind der Spiegelpunkt N des Kantenschwerpunkts bezüglich des Schwerpunkts G von T , sein antikomplementärer N_1 und sein reziproker N_2 , der Spiegelpunkt J des Schwerpunkts der Kantenquadrate bezüglich G (Verf. schlägt vor, J als dritten Lemoineschen Punkt von T zu bezeichnen; seine baryzentrischen Koordinaten sind $b'^2 + c'^2 + a^2, \dots$; die des ersten Lemoineschen Punktes K sind A^2, B^2, C^2, D^2 , die des zweiten $L, ab'c', bc'a', ca'b', abc$), der antikomplementäre J_1 von J und sein reziproker J_2 . Verf. gibt einige Eigenschaften dieser neuen Punkte an. — Ω sei der Mongesche Punkt von T . Er bildet mit den Ecken von T die Tetraeder $T_a \equiv \Omega BCD, T_b \equiv \Omega CDA, T_c \equiv \Omega DAB, T_d \equiv \Omega ABC$. Für diese Tetraeder gilt der Satz: Der Mongesche Punkt Ω ist Potenzpunkt der Kugeln (ω_i) ($i = a, b, c, d$), für die die Potenzen der Ecken der Tetraeder T_i gleich dem k -fachen des doppelten der Summe der Quadrate der von diesen Ecken ausgehenden Kanten vermindert um die Summe der Quadrate der Kanten der Gegenflächen sind. Für bestimmte Werte von k sind (ω_i) bekannte Kugeln der Tetraeder T_i .

Zacharias (Quedlinburg).

Vlahavas, G. N.: Une famille de droites concourantes. *Elemente Math., Basel* 4, 88—89 (1949).

Teilt man n willkürlich gewählte Punkte (der Ebene oder des Raumes) beliebig in zwei Gruppen von p und q Punkten mit den Schwerpunkten P und Q (gleiche Massen in allen Punkten vorausgesetzt), so geht die Gerade PQ durch den Schwerpunkt O der n Punkte, und es verhält sich $QO : OP = p : q$. Die Zahl der Geraden PQ für alle möglichen Werte von p und q ist $2^{n-1} - 1$. Diese einfache Bemerkung wendet Verf. auf mehrere Sonderfälle an und findet so insbesondere Sätze für die orthozentrische Punktgruppe (A, B, C und Höhenschnittpunkt H) und für das Tetraeder.

Zacharias (Quedlinburg).

Lely, U. Ph.: Anschauliche Figuren im Raume. Euclides, Groningen 25, 1—21 (1950) [Holländisch].

Verf. zeigt gut gelungene photographische Aufnahmen von rotierenden Drahtfiguren, die durch eine „Lichtebene“ geschnitten werden. Verf. hat die für Mittelschulzwecke bestimmte Methode ausgearbeitet ohne Kenntnis der Arbeit von E. Papperitz [Jber. Deutsche Math.-Verein. 20, 307—314 (1911)]. Er veranschaulicht die Figur von zwei Kreisen und deren Potenzlinie mit Hilfe eines räumlichen Modells. Weiter zeigt er Kreiskegelschnitte mit Dandelinischen Kugeln, Brennpunkten und Richtlinien, Kegelschnitte mit doppeltem Berührungskreis und mit Oskulationskreis; Umdrehungshyperboloide mit ebenen Schnitten und mit biquadratischer Kurve erster Art im allgemeinen und in einem entarteten Fall. Schließlich verschiedene Fälle ebener Schnitte einer Ringfläche.

J. C. H. Gerretsen (Groningen).

• **Stepanov, N. N.: Sphärische Trigonometrie.** 2. Aufl. Leningrad u. Moskau: OGIZ, Staatsverlag für techn.-theor. Lit. 1948. 154 S., Rb. 3,50 [Russisch].

Elementar-schulmäßige Einführung in die sphärische Trigonometrie bis zur Behandlung des schiefwinkligen sphärischen Dreiecks mittels der Halbwinkelsätze und der Neperschen Analogien. ϱ -Formeln, Inhaltssätze usw. werden nicht behandelt, ebensowenig der polare Zusammenhang der „Seiten“- und „Winkel“-Formeln. Zahlreiche Aufgaben, allerdings rein formalen Charakters, sind numerisch durchgerechnet.

W. Hahn (Berlin).

Gougenheim, André: Sur l'utilisation de la projection conique conforme d'exposant 2 pour la résolution graphique des triangles sphériques. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 58—60 (1949).

Von einem 3-Eck auf einer Kugel sind c , α und b gegeben. Die Kugel wird durch $y + xi = \exp(-2Z)$, worin $\operatorname{Re} Z$ und $\operatorname{Im} Z$ rechtwinklige isometrische Parameter der Kugel sind, so abgebildet, daß A und B auf dem Umfange und ein Pol des größten Kreises AB im Mittelpunkt eines Einheitskreises liegen. Nachdem die Bilder der durch A gehenden größten Kreise und ihrer orthogonalen Trajektorien gezeichnet und mit den Koordinaten α und b versehen sind, wird C gezeichnet. Der Mittelpunkt des Bildes AB hat die Koordinaten 0 und $c/2$. C wird an dem das Bild AB halbiierenden Einheitskreisradius, der mit dem durch A gehenden Einheitskreisradius den Winkel c bildet, in C' gespiegelt. C' hat die Koordinaten β und a . Die Gerade durch A und den Umkreismittelpunkt des Trapezes $ABCC'$ bildet mit dem durch A gehenden Einheitskreisradius den Winkel γ und schneidet den Einheitskreis im Punkte mit den Koordinaten 0 und $\pi/2 - \gamma$. Konrad Ludwig.

Völlm, Ernst: Über die Rektifikation eines Kurvenbogens. Elemente Math., Basel 5, 4—7 (1950).

Lowston, Walter H. und E. Voellmy: Die Quadratur des Kreises in Näherungskonstruktionen. Elemente Math., Basel 5, 12—15 (1950).

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

• **Corliss, John J., Irwin K. Feinstein und Howard S. Levin: Analytic geometry.** New York: Harper and Brothers 1949. XIV + 370 S.

Dieses Lehrbuch handelt ausführlich von der analytischen Geometrie der Ebene in ihrer klassischen Form (Seite 1—290) und gibt eine Einführung in die analytische Geometrie des Raumes (Seite 291—364). Im ersten Teil werden der Reihe nach die cartesischen Koordinaten, die gerade Linie, der Kreis, die Kegelschnitte, die Polarkoordinaten, die Koordinatentransformationen (Verschiebung und Drehung), die allgemeine Gleichung zweiten Grades, einige ebene Kurven höheren Grades und die Kurvendiskussion behandelt, während der zweite Teil die cartesischen Koordinaten im dreidimensionalen Raum, die Ebene, die gerade Linie und einiges über Flächen zweiten Grades, Raumkurven, Zylinder- und Kugelkoordinaten bringt. Das Buch enthält also den Lehrstoff, der zum großen Teil in unseren mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasien, im übrigen in elementaren Einführungsvorlesungen der Hochschule durchgenommen wird. Die Darbietung ist von methodischen Gesichtspunkten beherrscht und so ausführlich, daß sie auch für das Selbststudium geeignet ist. Der Text ist klar, mathematisch streng und läßt auf große Lehrerfahrung schließen; 219 gute Figuren und zahlreiche sorgfältig gewählte Beispiele und Übungsaufgaben verdienen besondere Erwähnung. Im übrigen hält sich das Buch an bewährte Vorbilder, ohne methodisch oder wissenschaftlich Neues zu bringen.

E. Löffler (Stuttgart).

• **Delone, B. N. und D. A. Rajkov: Analytische Geometrie. Bd. I. II.** Moskau u. Leningrad: OGIZ, Staatsverlag für techn.-theor. Lit. 1948, 1949. 456, 516 S., Rb. 14.-, 15.50 [Russisch].

Kapitelüberschriften: (Bd. I) I. Kartesische Koordinaten und Vektoren in der Ebene und im Raum. Geometrie der Matrizen zweiter und dritter Ordnung. II. Orthogonale und affine Abbildungen. III. Die gerade Linie in der Ebene. IV. Ellipse, Hyperbel, Parabel. V. Allgemeine Theorie der Linien zweiten Grades. (Bd. II) VI. Ebene und Gerade im Raum. VII. Ellipsoid, Hyperboloid, Paraboloid. VIII. Allgemeine Theorie der Flächen zweiten Grades. IX. Analytische Geometrie in der projektiven Ebene. X. Analytische Geometrie im projektiven Raum. — Das Werk ist ein Leitfaden für Studierende. Sein großer Vorzug besteht in der klaren und anschaulichen Entwicklung der Grundbegriffe und vor allem in der sehr übersichtlichen Stoffanordnung, die durch zahlreiche Abschnitte und Überschriften den Gedankengang erkennen läßt und das Aufsuchen einzelner Dinge sehr erleichtert. Im Aufbau der Theorie sind die Verf. in ihrem Bestreben, vom Besonderen zum Allgemeinen fortzuschreiten, allerdings etwas zu weit gegangen, so daß die allgemeinen Gesichtspunkte nicht immer in der wünschenswerten Klarheit herauskommen. Beispielsweise werden die drei Kegelschnitte mit ihren geometrischen Eigenschaften erst einzeln und unabhängig voneinander behandelt, dann kommt die Kegelschnitteigenschaft, dann erst im nächsten Kapitel die mehr algebraische Theorie der Gleichung zweiten Grades und auch da wieder reeller und komplexer Fall getrennt, und im zweiten Band wird der Gedankengang in den gleichen Stufen noch einmal für drei Dimensionen entwickelt. Bei diesem Aufbau ist es dem Lernenden eigentlich erst nach zweimaligem Durcharbeiten möglich, die Fülle der Einzelresultate in ihren Zusammenhängen zu begreifen. — Bemerkt sei auch noch, daß trotz der ziemlich ausführlichen Darlegungen über Vektor- und Matrizenalgebra in den ersten zwei Kapiteln nachher doch eigentlich immer nur mit Koordinaten gearbeitet wird. — Die beiden letzten Kapitel leiden etwas unter dem methodischen Nebeneinander von synthetischer und analytischer Betrachtungsweise. — Die sehr breite und ausführliche Darstellung erklärt es, daß das Buch trotz des großen Umfangs in der Stoffauswahl nicht über den alten klassischen Bestand hinausgeht.

W. Hahn (Berlin).

• **Muschelišvili, N. I.: Kursus der analytischen Geometrie. 3. Aufl.** Moskau u. Leningrad: OGIZ, Staatsverlag für techn.-theor. Lit. 1947. 644 S., Rb. 19.- [Russisch].

Kapitelüberschriften. I. Vektoren, Parallelprojektionen. II. Vektor- und Punktkoordinaten. III. Transformationen kartesischer Koordinaten. Bewegungen und affine Transformationen. IV. Gleichungen ebener Kurven. Die Gerade in der Ebene. V. Gerade und Ebene im Raum. VI. Imaginäre und uneigentliche Elemente. Homogene Kartesische und projektive Koordinaten. Projektive Transformationen. VII. Grundgleichungen und elementare Eigenschaften der Kegelschnitte. VIII. Projektive Eigenschaften der Kurven zweiten Grades. Tangente und Polare. IX. Affine und metrische Eigenschaften der Kurven zweiten Grades. X. Invarianten. Bestimmung der Gestalt und der Lage der Kurven zweiten Grades. XI. Allgemeine Eigenschaften der Flächen zweiten Grades. Tangentialebene, Mittelpunkt, Durchmesser. XII. Untersuchung der Gestalt spezieller Flächen zweiten Grades. Geraden-scharen, Kreisschnitte. Anhang: Elementare Ausführungen über lineare und quadratische Formen. — Eine ausgezeichnete Gesamtdarstellung des klassischen Stoffes. Verf. legt besonderen Wert darauf, die analytisch-algebraischen Methoden herauszuarbeiten, mittels deren man geometrische Fragestellungen angreifen kann, sowie die allgemeinen Grundsätze zu entwickeln, die die Fülle der Einzelergebnisse zu ordnen gestatten. Strenge Deduktion wechselt mit der mehr induktiv durchgeführten Lösung einzelner Aufgaben. Eine Reihe schwieriger, beim ersten Durcharbeiten entbehrlicher Paragraphen sind durch Kleindruck gekennzeichnet. — Kap. VI bringt die „projektive Geometrie“ nur soweit, wie es nachher zur Klassifikation der Kurven und Flächen zweiten Grades notwendig ist, Kap. VIII enthält neben dieser Klassifikation nur eine kurze Ausführung über Polaren und Tangenten. Kurven und Flächen zweiter Ordnung und weitere „projektive“ Begriffsbildungen werden nicht behandelt.

W. Hahn (Berlin).

• **Locher-Ernst, L.: Das Imaginäre in der Geometrie. Elemente Math., Basel 4,** 97—105 (1949).

Verf. gibt eine elementare Einführung in die Darstellung und konstruktive Behandlung komplexer („imaginärer“) Punkte der Ebene, die durch die Pfeile MN versinnlicht werden, welche den Zentralpunkt M ihrer v. Staudtschen orientierten Involution mit dem passenden Potenzpunkt N verbinden. Den Zwecken der Zeitschrift gemäß, wird nichts vorausgesetzt, sondern alles ob ovo entwickelt. Behandelt werden in sehr anschaulicher Darstellung in diesem ersten Teile: der Pfeil eines imaginären Punktes, die imaginären Punkte in der Ebene und im Raume, die Geraden einer Ebene, Verbinden und Schneiden in der Ebene, die imaginären Punkte und Tangenten eines Kegelschnitts.

K. Strubecker (Karlsruhe).

Locher-Ernst, L.: Das Imaginäre in der Geometrie. II. Elemente Math., Basel 4, 121—128 (1949).

In Fortsetzung von Teil I der Arbeit (vorsteh. Referat) wird die Darstellung imaginärer Ebenen und hochimaginärer Geraden behandelt, beide aufgefaßt als Örter von Punkten, die durch die Pfeile realisiert werden, die (in der v. Staudtschen Orientierung) Zentral- und Potenzpunkt der sie definierenden reellen Involution verbinden. Dabei werden z. B. isotrope Geraden durch rotatorische räumliche Wirbel dargestellt, deren Träger ein elliptisches Drehnetz ist; allgemeine hochimaginäre Geraden haben dazu affine Bildfiguren. Es werden die einfachsten Inzidenzaufgaben gelöst. Mit einigen Bemerkungen über die Darstellung der komplexen Elemente auf Flächen 2. Ordnung schließt die Arbeit, die sich, dem Zwecke der „Elemente der Mathematik“ gemäß, erfolgreich um eine möglichst elementare Darstellung bemüht. — Es wäre vielleicht wertvoll, in ähnlichem Sinne die sehr schöne und beweglichere, aber wenig bekannte, konstruktive Behandlung imaginärer Elemente von J. Grünwald [Z. Math. Phys. 54, 154—220; 55, 264—296 (1907)] weiteren Kreisen vertraut zu machen.

K. Strubecker (Karlsruhe).

Locher-Ernst, L.: Kugel und einschaliges Hyperboloid. Elemente Math., Basel 5, 15—17 (1950).

Reuschel, Arnulf: Eine einfache Berechnung der Mantelfläche eines Drehkegels. I, II. Elemente Math., Basel 4, 73—78, 133—138 (1949).

Schneidet man einen Drehkegel durch eine zur Achse senkrechte Ebene E_1 und eine zur Achse geneigte, nicht durch die Spitze gehende Ebene E_2 , so wird der zwischen den beiden Ebenen liegende Teil des Kegels als Drehkegelmantel bezeichnet. In der Arbeit wird gezeigt, wie man die Mantelfläche dieses Drehkegelmantels in elementarer Weise, d. h. ohne Integration, berechnen kann. Die Berechnung stützt sich auf die Tatsache, daß der Drehkegel eine Böschungsfäche ist. Man kann also die Mantelfläche des Drehkegelmantels ermitteln, wenn man den Flächeninhalt ihrer Normalprojektion auf die Ebene E_1 durch den Kosinus des Böschungswinkels der Kegelfläche dividiert. Nach Erlöschung des einfachsten Falles, in dem die Ebene E_2 den durch E_1 ausgeschnittenen Parallelkreis des Kegels nicht schneidet, wird der Fall desjenigen Drehkegelmantels untersucht, der begrenzt wird von einem den Parallelkreis des Kegels in zwei reellen getrennten Punkten schneidenden Kegelschnittbogen und seiner Zentralprojektion aus der Kegelspitze auf die Ebene E_1 . Je nachdem dieser Kegelschnittbogen einer Ellipse, einer Hyperbel oder einer Parabel angehört, ergeben sich verschiedene Fälle, die der Reihe nach durchgerechnet werden. Es ist leicht zu sehen, daß in den Formeln für die Mantelfläche des elliptischen und des parabolisch begrenzten Drehkegelmantels zyklometrische Funktionen auftreten, während bei hyperbolischer Begrenzung außerdem noch hyperbolische Areefunktionen eingehen. Den Abschluß bildet eine Betrachtung der Grenzübergänge und der Zusammenhänge im Komplexen. *E. Löffler.*

Mandan, Sahib Ram: Gauss-points in n -dimensional space. Bull. Calcutta math. Soc. 41, 6—8 (1949).

Als Gauß-Punkte bezüglich zweier Simplexe S und S' des R_n werden solche Punkte bezeichnet, die in irgendeiner Anordnung bezüglich beider Simplexe dieselben Koordinaten haben, wobei als Einheitspunkt des Koordinatensystems der Schwerpunkt des Bezugssystems gewählt wird (baryzentrische Koordinaten!). Es gibt insgesamt $(n+1)!$ Gauß-Punkte. Sie liegen alle auf einer quadratischen Mannigfaltigkeit W und zu $(n-r+1)!$ in insgesamt

$$\frac{1}{r!} \cdot \frac{(n+1)!}{(n-r+1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{(n-r+1)!}$$

linearen R_{n-r} ($r = 1, 2, \dots, n-1$), insbesondere ($r = 1$) zu $n!$ in $(n+1)^2$ linearen R_{n-1} . Diese $(n+1)^2$ R_{n-1} sind Seiten von zwei Reihen von je $(n+1)$ Simplexen. Die Simplexe der einen Reihe liegen paarweise perspektiv, wobei der Schwerpunkt von S Perspektivitätszentrum ist, und die $(n-1)$ -dimensionalen Achsen der Perspektivität durch den Schwerpunkt und eine $(n-2)$ -dimensionale Kante von S' gehen. Umgekehrt gilt für die zweite perspektive Simplexreihe. Die Schwerpunkte von S und S' sind bezüglich W konjugiert. — In der Ebene ($n = 2$) folgt für die 6 Gaußschen Punkte zweier Dreiecke S, S' Kegelschnittslage. Je zwei von ihnen liegen auf 9 Geraden, die Seiten zweier Dreieckstrippel sind, wobei die Dreiecke jedes Tripels paarweise perspektiv bezüglich des Schwerpunkts von S bzw. S' liegen und die Perspektivitätsebenen die Schwerlinien des anderen Dreiecks (S' bzw. S) sind. Die Schwerpunkte sind konjugiert bezüglich des Kegelschnitts. Je 6 der Gauß-Punkte haben eine der Schwerlinien als Pascalsche Gerade und die Schwerpunkte bilden ein Paar von Steinerschen konjugierten Punkten.

K. Strubecker (Karlsruhe).

Karamata, J.: Eine elementare Herleitung des Desarguesschen Satzes aus dem Satze von Pappos-Pascal. *Elemente Math.*, Basel 5, 10—11 (1950).

Sengupta, B. K.: Propositions of polar reciprocals. *Bull. Calcutta math. Soc.* 39, 59—60 (1947).

Die Arbeit enthält in verkleideter Form folgende einfachen Sätze: Die bezüglich konfokaler Kegelschnitte gebildeten Pole derselben Geraden liegen auf einer zu dieser senkrechten Geraden; die bezüglich konzentrischer Kreise gebildeten Polazugeordneten derselben Figur sind homothetisch bezüglich des gemeinsamen Kreismittelpunktes.

G. Hajós (Budapest).

Postma, D.: Die Figur der Ähnlichkeitspunkte von vier Kreisen. *Simon Stevin, wis. natuurr. Tijdschr.* 26, 149—167 (1949) [Holländisch].

Verf. deutet die Figur von vier Kreisen mit ihren Ähnlichkeitspunkten als Zentralprojektion eines Parallelepipedes P : Die Mittelpunkte der Kreise sind die Fluchtpunkte der Kanten und der Schnittpunkt der Körperdiagonalen von P . Jeder Ähnlichkeitspunkt von zweien der vier Kreise ist entweder Schnittpunkt oder Fluchtpunkt zweier Flächendiagonalen von P . Die Projektion jeder Flächendiagonale geht durch einen Ähnlichkeitspunkt zweier Kreise und einen Ähnlichkeitspunkt der beiden anderen Kreise. Durch die vier Kreise sind 16 gerade Linien bestimmt, deren jede durch einen der vier Mittelpunkte geht. Das sind die Projektionen der 12 Kanten und der 4 Körperdiagonalen von P . Mit Hilfe dieser räumlichen Deutung der Figur leitet Verf. viele Eigenschaften der Ähnlichkeitspunkte her. Merkwürdigerweise erwähnt er nicht, daß es sich doch um die bekannte Reyesche Hexaederkonfiguration ($12_4, 16_3$) handelt. Die Mittelpunkte der Kreise sind die Projektionen der Ecken des einen der drei desmischen Tetraeder, die in jener Konfiguration enthalten sind, und die 12 Ähnlichkeitspunkte sind die Projektionen der Punkte der mit dieser „harmonisch gekoppelten“ Konfiguration ($12_4, 16_3$). (Vgl. die Arbeit des Ref., dies. Zbl. 32, 300.)

Zacharias (Quedlinburg).

Carrasco, Luis Esteban: Verteilung von Punkten auf homographischen Kreisen. *Rev. mat. Hisp. Amer.*, IV. S. 8, 134—142 (1948) [Spanisch].

Die Arbeit stützt sich auf eine Abhandlung von L. Hofmann und E. Kasner, *Homographic circles or clocks*, *Bull. Amer. math. Soc.* 34, 495—503 (1928). Diese behandelt verschiedene Sätze über die homographische Transformation eines Kreises in einen anderen und untersucht besonders die Anordnung der Punkte im transformierten Kreis unter der Annahme, daß die Anordnung im ursprünglichen Kreis gleichförmig ist. Verf. beweist diese Sätze mit elementaren Hilfsmitteln. Er untersucht auch die Punktverteilung im Innern des transformierten Kreises sowie den bei Hofmann und Kasner ausgeschlossenen Fall, daß die transformierte Kurve eine Gerade ist. Schließlich behandelt er einige Verallgemeinerungen für den Fall einer ungleichförmigen Punktverteilung und wendet das Ergebnis an auf das Studium der Punktverteilung auf den geradlinigen Derivierten einer polygenen Funktion. Bei seinen Beweisen benützt Verf. einige physikalische Begriffe, wie z. B. Gravitationszentrum, Punktdichte und gewisse eigenartige Bezeichnungen, für

deren Erklärung er auf die angeführte Arbeit von Hofmann und Kasner und einige andere in Amerika, Italien und Spanien erschienene Abhandlungen verweist.

E. Löffler (Stuttgart).

Blaschke, Wilhelm: *Kinematische Begründung von S. Lie's Geraden-Kugel-Abbildung.* S.-B. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1948, 291—297 (1949).

Die Arbeit will einen anschaulichen Weg zur Lieschen Geraden-Kugel-Transformation zeigen. Zunächst wird eine Zuordnung der gerichteten Linienelemente einer festen euklidischen Ebene zu den um 45° gegen diese geneigten „isotropen“ Geraden des Raumes beschrieben. Insbesondere werden Reguli in der Ebene und isotrope Reguli im Raum betrachtet; die letzteren werden gerichtete Kugeln genannt (es sind, genau genommen, C -Kugeln in der Bezeichnung von J. L. Krames; vgl. E. Müller, Vorlesungen über Darstellende Geometrie II, Zyklographie, S. 64, Leipzig und Wien 1929). Es erweist sich, daß diese als „isotroper Reiß“ bezeichnete Zuordnung mit der bekannten zyklographischen Abbildung übereinstimmt. Danach wird der „kinematische Reiß“ behandelt, der jedem Raumpunkt eine Bewegung in der Ebene, oder, da jede solche nach Festlegung eines gerichteten Linienelementes in der Ebene durch ein ebensolches repräsentiert werden kann, ein Linienelement der Ebene zuordnet. Den Punkten einer Raumgeraden entsprechen dabei die Elemente eines Regulus. (Unabhängig von der Lage des festgelegten Linienelementes kann bekanntlich jeder Geraden ein Punktepaar der Ebene zugewiesen werden.) Die Zusammenfassung beider Abbildungen führt von den isotropen Geraden des Raumes über die Linienelemente der Ebene zu den Punkten des Raumes; durchläuft ein solcher eine Gerade, so beschreibt die entsprechende isotrope Gerade im Raum einen isotropen Regulus: man erhält eine Zuordnung der Raumgeraden zu den Kugeln (die aber, wie gesagt, C -Kugeln sind, wodurch eine reelle Zuordnung möglich wird, während die eigentliche Geraden-Kugel-Transformation von Sophus Lie ja notwendig imaginär sein muß). Die Transformation wird noch als Zuordnung der die feste Ebene schneidenden Raumebenen zu den isotropen Raumgeraden gedeutet. Die Entscheidung darüber, inwieweit es sich um umkehrbar eindeutige Abbildungen handelt, wird meist dem Leser überlassen; die damit zusammenhängende Frage, welche Elemente als uneigentliche anzusehen sind, wird gelegentlich gestreift. — Das Verständnis wird durch 6 Abbildungen sehr erleichtert (in Abb. 4 müßte der Punkt p von den Punkten o und o' gleich weit entfernt liegen).

Löbel (München).

Checeucci, Vittorio: *Sulle omografie che trasformano in sè una quadrica o una antiquadrica dell' S_{n-1} .* Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. S. 2, 131—149 (1950).

Une homographie non dégénérée et une corrélation non dégénérée d'un S_n étant données par leurs matrices respectives A et B , elles sont permutables, si les corrélations produit de A par B et de B par A , coïncident, c'est à dire si:

$$B = \varepsilon A_{-1} B A \quad (A_{-1} \text{ transposée de } A).$$

Cette remarque conduit l'A. à étudier la transformation par cogrédience d'une matrice en elle-même, donc la recherche des matrices X non dégénérées, telles que l'on ait: $A_{-1} X A = X$. Ceci exige que les racines caractéristiques de A se répartissent en couples réiproques d'égale signature; toutes les solutions s'obtiennent à partir de l'une d'elles en la multipliant à droite par les matrices permutables à A . Utilisant la forme canonique de S. Cherubino [Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VI. S. 23, 478—482, 647—653 (1936); ce Zbl. 14, 338], l'A. montre que pour que la transformation conserve les matrices symétriques, il faut et suffit que pour les signatures des racines (I) , (h_1, h_2, \dots, h_j) , $h_k - h_{k-1}$ soit pair si $j - k$ est impair. — Des propriétés analogues s'obtiennent pour la contragrédience, définie

par: $A_{-1} X A^- = X$ (A complexe conjuguée de A) dont les racines caractéristiques seront par couples conjuguées de leur réciproque. — Appliquant ces résultats au problème initial et utilisant les résultats de Cherubino [Rend. Sem. mat. Univ. Roma, IV. S. 1, 139—174 (1937); ce Zbl. 16, 169] sur les homographies permutables, il montre que les homographies permutables à A se répartissent en systèmes linéaires, correspondant à ceux des homographies permutables à A ; si les conditions de symétrie sont vérifiées par A , chaque système contient un système linéaire de polarités. On en déduit facilement la loi de transformation des espaces fondamentaux et secondaires associés à une racine caractéristique dans les étoiles associées à la racine réciproque. — Il donne également une nouvelle démonstration du théorème de Segre sur le comportement dans une homographie conservant une quadrique des espaces linéaires de dimension maxima qui y sont contenus. — Propriétés analogues pour les anticorrélations; en particulier les antipolarités se distribuent en un système linéaire ou en deux selon la parité d'un nombre k diviseur du nombre de racines caractéristiques distinctes, et tel que les racines d'un des cycles soient proportionnelles aux puissances de ε , ε étant racine $k^{\text{ème}}$ de l'unité. *B. d'Orgeval.*

Charrueau, André: Sur les faisceaux de complexes linéaires. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 712—714 (1948).

Diese kurze Mitteilung beschäftigt sich mit Eigenschaften eines Büschels von linearen Komplexen in Zusammenhang mit der betreffenden Achsenfläche (Zylindroid). Nach Wiederholung verschiedener bekannter Tatsachen betrachtet Verf. die Geraden D' , D'' , die einer gegebenen Geraden D allgemeiner Lage in den Nullsystemen von zwei Komplexen des Büschels entsprechen; diese zwei Geraden D' , D'' sind miteinander polar in bezug auf einen dritten Komplex des Büschels.

E. G. Togliatti (Genova).

Charrueau, André: Sur les faisceaux de complexes linéaires et sur les suites et cycles de complexes linéaires conjugués. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 334—336 (1949).

Diese Mitteilung ist eine Fortsetzung anderer vier Mitteilungen über Büschel linearer Strahlenkomplexe [C. r. Acad. Sci., Paris 228, 359—360, 803—805, 894—896 (1949) und vorsteh. Referat]. Verf. betrachtet hier hauptsächlich die Produkte T_j der Nullsysteme $T_{\mu_1}, T_{\mu_2}, \dots, T_{\mu_j}$, die j Komplexen des Büschels entsprechen; T_j ist eine Homographie oder eine Reziprozität, je nachdem j gerade oder ungerade ist. Im Falle eines ungeraden j ist T_j das Nullsystem eines anderen Komplexes des Büschels. Im Falle eines geraden j hat T_j als Doppelpunkte alle Punkte der zwei Achsen der speziellen Komplexe des Büschels; wenn T_j involutorisch ist, bilden die j Komplexe eine konjugierte Reihe. *E. G. Togliatti (Genova).*

Algebraische Geometrie:

Néron, André: Un théorème sur le rang des courbes algébriques dans les corps de degré de transcendance fini. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1087—1089 (1949).

Verf. zeigt, wie sich seine früheren Resultate über kubische Kurven (dies. Zbl. 30, 318) auf Familien von algebraischen Kurven mit einer endlichen Anzahl von Parametern ausdehnen lassen. Er beweist z. B.: Es gibt in einem Körper von endlichem Transzendenzgrade algebraische Kurven vom Geschlechte p , die einen endlichen Rang $\geq 3p + 5$ haben; wenn $p = 1$ ist, kann der Rang sogar ≥ 10 sein.

Nagell (Uppsala).

Lorent, H.: Contribution à l'analogie entre les cubiques planes de genre un et les biquadratiques gauches de première espèce. Bull. Soc. Sci. Liège 16, 78—83 (1947).

Sechste Fortsetzung früherer Arbeiten, wo die übliche parametrische Darstellung einer ebenen C^3 und einer räumlichen C^4 1. Art durch die Abelschen Integrale 1. Gattung zeigt, daß diese zwei Kurven zahlreiche ähnliche geometrische Eigenschaften besitzen. Hier werden für die C^3 und die C^4 folgende Konfigurationen betrachtet: 1. $3n$ Punkte der C^3 und ihre Tangentialpunkte; $4n$ Punkte der C^4

und ihre Tangentialpunkte; 2. vier Punkte der C^3 mit demselben Tangentialpunkt; 9 Punkte der C^4 mit demselben Tangentialpunkt oder zwei Punkte A, B der C^4 mit den vier Berührungspunkten der aus AB an C^4 gezogenen Tangentialebenen; 3. zwei Punkte der C^3 und die Berührungspunkte der aus ihnen an C^3 gezogenen Tangenten; zwei Sekanten der C^4 und die aus ihnen an C^4 gezogenen Tangentialebenen; 4. drei Punkte der C^3 und die aus ihnen an C^3 gezogenen Tangenten; drei Punkte der C^4 und die aus je einer von ihnen an C^4 gezogenen Schmiegungebenen, oder vier Punkte A, B, C, D der C^4 und die aus den Seiten des einfachen Vierseits $ABCD$ an C^4 gezogenen Tangentialebenen. In jedem Falle wird die Existenz gewisser Kurven oder Flächen bewiesen, die durch alle betrachteten Punkte hindurchgehen.

E. G. Togliatti (Genova).

Metelka, Josef: Sur certains systèmes linéaires surabondants de courbes planes. Bull. Soc. Sci. Liège 16, 94—97 (1947).

L'A. généralise des théorèmes dus au rapporteur et à A. Bloch et en déduit certains systèmes surabondants de courbes planes. — Soient n, l, k, r des entiers vérifiant les inégalités $n > 3$, $0 \leq l \leq 2$, $r \geq 0$, $r > \frac{1}{2}l(l-3) - k - 1$, $k \leq (n+l-3)(l-3) - 2$ et, pour $l = 1$ ou 2 , à $k \geq l(3-n) + 2$; supposant alors que les n^2 points communs à deux courbes d'ordre n soient tous simples pour une des courbes au moins et que $\frac{1}{2}(n+l)(n+l-3) + k$ d'entre eux soient points-base d'un système irréductible de dimension effective r de courbes d'ordre $(n+1-3)$, les autres sont les points-base d'un système surabondant de courbes d'ordre $(n-1)$ de dimension effective $r+k+1+l(l-3)$. La réciproque est vraie, si ce dernier système est irréductible. — L'A. applique ce théorème à la construction de quelques systèmes surabondants.

B. Gambier (Paris).

Fano, Gino: Su una particolare varietà a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. 6, 151—156 (1949).

Die hier betrachtete Mannigfaltigkeit gehört der Reihe der $V_{3^{p-2}}^2$ eines Raumes S_{p+1} an, die vom Verf. schon viel studiert worden sind. Hier ist $p = 12$; man hat also eine $V_{3^{10}}^{22}$ eines Raumes S_{13} , die folgendermaßen konstruiert werden kann. Es sei R^4 eine rationale normale Regelfläche allgemeiner Art in einem Raume S_5 ; sie besitzt ∞^1 Leitlinien 2. Ordnung; wenn man die ∞^4 Sehnen dieser R^4 auf die Graßmannsche Mannigfaltigkeit M_8^{14} der Geraden des S_5 abbildet, erhält man eine V_4^{22} eines Raumes S_{14} ; der Schnitt dieser V_4^{22} mit einer Hyperebene allgemeiner Lage ist die gesuchte $V_{3^{10}}^{22}$ eines S_{13} ; sie liefert die Abbildung im S_{14} der Sehnen von R^4 , die einem allgemeinen Strahlenkomplex K angehören. Verf. findet auf $V_{3^{10}}^{22}$ zwei Regelflächen. Die erste ist eine rationale normale Regelfläche 6. Ordnung eines Raumes S_7 ; ihre Erzeugenden liefern die Abbildung im S_{14} der ∞^1 Strahlenbüschel des Komplexes K , die in den ∞^1 Ebenen der Leitlinien von R^4 liegen (der Ort der Mittelpunkte solcher Strahlenbüschel ist eine Kurve γ^3). Die zweite Regelfläche hat die Ordnung 32. Die $V_{3^{10}}^{22}$ kann auch als Projektion einer $V_{3^{10}}^{32}$ des Raumes S_{18} erhalten werden. Schließlich einige Bemerkungen über den besonderen Fall, wo der Strahlenkomplex K die Regelfläche R^4 enthält, und über den anderen besonderen Fall, wo die Kurve γ^3 auf R^4 liegt.

E. G. Togliatti (Genova).

Godeaux, Lucien: Une représentation des transformations birationnelles du plan et de l'espace. Acad. Belgique, Cl. Sci., Mém., Coll. 8°, II. S. 24, Nr. 1590, 31 p. (1949)

Die entsprechenden Punktepaare einer ebenen Cremonaschen Verwandtschaft T der Ordnung n zwischen zwei Ebenen σ, σ' können auf die Punkte einer Fläche F der Ordnung $2n+2$ eines Raumes S_{n+4} birational abgebildet werden; sie ist diejenige Fläche, die auf σ durch das Linearsystem $|D| = |a + A|$ abgebildet wird, wobei a eine beliebige Gerade von σ und A eine Kurve des T definierenden homaloidischen Netzes bedeuten. Diesen Gedanken hat Verf. in einer früheren Abhandlung entwickelt [Bull. Soc. Sci. Liège 11, 268—271 (1942)]. Hier wird dieselbe Aufgabe in einer zusammenfassenden Darstellung wieder behandelt; zunächst im

Falle, daß T lauter gewöhnliche Fundamentalpunkte besitzt. Die wichtigsten Eigenschaften der Transformation T werden durch die obengenannte Abbildung wiedergefunden. Es folgen, als Beispiele, einige Bemerkungen für den Fall, wo T einen fundamentalen Basispunkt mit der Multiplizität s besitzt, so daß $t \leq s$ der betreffenden Tangenten fest liegen. — Im 2. Teil findet man die Ausdehnung auf die räumlichen Cremonaschen Verwandtschaften der Ordnungen n, n' , im Falle, daß sie lauter reguläre isolierte Fundamentalpunkte und reguläre Fundamentalkurven 1. Art (außer gewissen Fundamentalkurven 2. Art) besitzen. An Stelle der Fläche F findet man jetzt die Mannigfaltigkeit V_3 , die durch das Linearsystem $|D| = |\alpha + A|$ auf den Raum abgebildet wird, wo α eine Ebene und A eine Fläche des T definierenden homaloidischen Systems bedeuten; V hat die Ordnung $3(n + n') + 2$; für die Dimension ihres Einbettungsraumes kann man nur eine untere Grenze angeben. — Im 3. Teil wird der Fall einer ebenen involutorischen T kurz behandelt; in diesem Falle wird F , oder V , durch eine involutorische Homographie in sich überführt.

E. G. Togliatti (Genova).

Godeaux, Lucien: Structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 173—175 (1948).

Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I_p d'ordre premier p . On peut prendre, comme modèle projectif de la surface F , une surface normale d'ordre pn , de S_r , sur laquelle I_p est déterminée par une homographie cyclique H possédant p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{p-1}$. On désigne par $|C_i|$ le système de courbes découpé sur F par les hyperplans de S_r passant par $\sigma_0, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_{p-1}$. Soit A un point uni. L'A. montre que la détermination de la structure du point uni A équivaut à déterminer le comportement en A des courbes C_i particulières passant par A .

Kárteszi (Budapest).

Stubban, John Olav: Sur l'involution de Bertini. Bull. Soc. Sci. Liège 16, 98—102 (1947).

Es seien $O_1, O_2, O_3, \dots, O_8$ feste Punkte der Ebene. Wie Bertini gezeigt hat, gehen alle Kurven 6. Ordnung, die durch O_i je doppelt und durch einen beliebigen Punkt P_1 einfach hindurchgehen, noch durch einen weiteren Punkt P_2 hindurch. Die Zuordnung von P_1 und P_2 ist die Involution von Bertini. Verf. bildet nun das System der Kurven 9. Ordnung, die je dreifach durch O_i hindurchgehen, projektiv auf die Ebenen eines 6-dimensionalen Raumes ab. Dann geht die Bertinische Involution in eine projektive Involution über, deren Eigenschaften sich dann leicht wieder in die Ebene zurückübertragen lassen.

Ott-Heinrich Keller (Dresden).

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Buzano, Piero: Cilindri di rotazione e curve sghembe. Rend. Sem. mat., Torino 8, 145—158 (1949).

Ce travail, d'une rare élégance, rappelle d'abord ce qu'est l'équation intrinsèque d'une surface S définie à un déplacement près: une courbe gauche Γ dont la courbure k et la torsion τ sont définies en fonction de l'arc s peut être logée sur la surface S si k, τ satisfont à une équation différentielle E d'ordre 4 en k , 3 en τ , dite équation intrinsèque de S ; si S coïncide avec elle-même par un sousgroupe de déplacements à p paramètres, l'ordre de E s'abaisse de p unités; l'ordre de E augmente de q unités si S dépend de q paramètres autres que ceux du déplacement: certaines solutions de E peuvent faire exception; ainsi, si une surface est telle que toutes ses courbes vérifient $(R^2 - a^2) + (T dR/ds)^2 = 0$ (avec $Rk = T\tau = 1$), c'est une sphère de rayon a ; mais une courbe autre qu'un cercle de rayon a , dont le rayon de courbure E est toujours égal à a , n'est pas sphérique. L'équation $R + T \frac{d}{ds} \left(T \frac{dR}{ds} \right) = 0$ est l'équation

intrinsèque d'une sphère de rayon non précisé et cette équation n'admet pas de solution parasite. — L'A. rappelle que M. Cotton a obtenu l'équation intrinsèque du cylindre de révolution de rayon donné; il cherche l'équation intrinsèque d'un cylindre de révolution de rayon non précisé. Il y arrive par 3 stades: il montre d'abord qu'il y a 6 cylindres de révolution passant par cinq points donnés M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 ; on y arrive en étudiant d'une part les paraboloides de révolution qui passent en M_1, M_2, M_3, M_4 ; chacun d'eux est déterminé d'une façon unique par le point l à l'infini de son axe, la section du paraboloïde par le plan II de l'infini étant les tangentes issues de l à l'ombilicale; si, de plus, l est sur une certaine cubique C_3 de II , le paraboloïde dégénère en cylindre de révolution; on considère d'autre part les quadriques passant en M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 ; leur section par II est une conique harmoniquement circonscrite à une certaine conique γ déterminée par M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 d'une façon unique; si la quadrique est un paraboloïde, la section par II est formée de deux droites conjuguées par rapport à γ ; si ces deux droites sont isotropes, les tangentes menées de leur point commun à γ sont rectangulaires et ce point est sur une certaine conique C_2 de II ; les points communs à C_3 et C_2 donnent les solutions; le second stade consiste à supposer que les cinq points sont réunis en un même point d'une courbe gauche Γ donnée; en chaque point M de Γ il existe six cylindres de révolution ayant avec T un contact d'ordre 4; λ, μ, ν étant les paramètres directeurs de l'axe par rapport au trièdre de Frenet de Γ en M , on a les deux équations

$$\left(\frac{k'}{k}\nu + \tau\mu\right)(\mu^2 + \nu^2) + 3k\lambda\mu\nu = 0; \quad 3k^3\tau(\lambda^2 - \mu^2) +$$

$$+ \left(-k''\tau + k\tau^3 + \frac{2k'^2}{k}\tau + k'\tau'\right)(\mu^2 + \nu^2) + (2kk'\tau + 3k^2\tau')\lambda\mu + 4k^2\tau\lambda\nu = 0.$$

Enfin le dernier stade consiste à exprimer que l'un de ces cylindres a un contact d'ordre 5 avec Γ , ce qui donne

$$10kk'(\lambda^2 - \mu^2) + \left(-\frac{k''}{k} + \frac{2k'^2}{k}\tau^2 + 3\tau\tau' + \frac{3k'k''}{k^2} + \frac{3k^2\tau'}{k^2\tau} + \frac{k'\tau''}{k\tau}\right)(\mu^2 + \nu^2)$$

$$+ \left(12k^3 + 2k\tau^2 + 4k'' + \frac{9k'\tau'}{\tau} + \frac{k\tau''}{\tau}\right)\lambda\mu + 5(2k'\tau + k'\tau')\lambda\nu + 10k^2\tau\mu\nu = 0.$$

L'élimination conduit à envisager les solutions parasites pour lesquelles les deux premières de ces équations ont une solution $(\lambda : \mu : \nu)$ multiple. B. Gambier.

Lalan, Victor: Le rôle des asymptotiques virtuelles dans la théorie de l'immersion des surfaces. Bull. Sci. math., II. S. 73_I, 16—32 (1949).

Verf. betrachtet das quasilineare Differentialsystem

$$A \frac{\partial x}{\partial u} + B \frac{\partial x}{\partial v} + C \frac{\partial y}{\partial u} + D \frac{\partial y}{\partial v} + E = 0, \quad A' \frac{\partial x}{\partial u} + B' \frac{\partial x}{\partial v} + C' \frac{\partial y}{\partial u} + D' \frac{\partial y}{\partial v} + E' = 0,$$

in welchem A, B, \dots, E' Funktionen von u, v, x, y sind. Werden die abhängigen Veränderlichen x, y des Systems durch ξ, η ersetzt, so kann der Übergang zu ξ, η derart gewählt werden, daß man zu einem System gelangt, in welchem jede Gleichung nur die Ableitungen einer und derselben unbekannten Funktion enthält. Solche Systeme nennt Verf. systèmes à dérivées séparées. Diese allgemeine Theorie wendet Verf. zunächst auf die Codazzischen Gleichungen der Flächentheorie an. Sind in diesem Falle α und β die Richtungskoeffizienten der Asymptotentangenten, so bestimmt die Wahl $\xi = \alpha$ und $\eta = 1/\beta$ die Komponenten der zweiten Fundamentalfarm der Fläche gemäß

$$L = 2\sqrt{-K}g \frac{\eta}{\xi\eta-1}, \quad M = -\sqrt{-K}g \frac{\xi\eta+1}{\xi\eta-1}, \quad N = 2\sqrt{-K}g \frac{\xi}{\xi\eta-1}, \quad g = |g_{ik}|.$$

Dabei wird die Metrik g_{ik} der in Rede stehenden Fläche bekannt vorausgesetzt. Jede der so definierten Funktionen ξ und η genügt einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, und jeder Lösung der einen dieser beiden Gleichungen

ist eine Lösung der zweiten zugeordnet. Auf diese Weise läßt sich das Problem der Verbiegung einer Fläche auf die Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückführen. Zum gleichen Resultat gelangt man bei Verwendung einer oder der anderen der beiden partiellen Differentialsysteme, welche Darboux zur Bestimmung der virtuellen Asymptotenlinien einer Fläche mit gegebener Metrik benutzt. Mit ihrer Metrik und einer Schar von Asymptotenlinien ist die Fläche bereits im wesentlichen bestimmt. Eine Ausnahme tritt jedoch im Falle geradliniger Asymptoten ein. — In einem abschließenden Abschnitt behandelt Verf. das gleiche Thema mit den Cartanschen Methoden des „trièdre mobile“. Hier wird der Begriff „indicatif“ eines Kurvennetzes (vgl. V. Lalan, dies. Zbl. 33, 213) verwendet. Darunter sind gewisse Vektoren auf der Fläche zu verstehen, welche sich z. B. im Falle eines Asymptotennetzes durch die Ausdrücke $K_\alpha/4K$, $K_\beta/4K$ mit Hilfe der totalen Krümmung K und ihren ersten Ableitungen berechnen. Ist R irgendein Kurvennetz auf der Fläche mit dem Indicatif Q , so sind stets zwei weitere Indicatifs von Interesse, Q_φ , zugeordnet dem Orthogonalnetz, das aus der ersten Schar von R und deren Orthogonaltrajektorien besteht, und Q_ψ , zugeordnet dem Orthogonalnetz, das aus der zweiten Schar von R und deren Orthogonaltrajektorien besteht. Für die kontravarianten Komponenten gilt in diesem Zusammenhang $Q^1 = Q_\varphi^1$, $Q^2 = Q_\psi^2$. Weitere interessante Beziehungen bestehen zu den Rotationskoeffizienten des trièdre mobile.

M. Pinl (Dacca).

Lemoine, Simone: Le rôle des directions principales dans l'immersion des surfaces. Bull. Sci. math., II. S. 72_I, 168—190 (1948).

Lemoine, Simone: Sur les surfaces admettant deux formes linéaires données comme éléments d'arc de leurs lignes de courbure. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 461—463 (1949).

Lemoine, Simone: Détermination des couples de surfaces isométriques avec correspondance des lignes de courbure. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1476—1478 (1949).

Lemoine, Simone: Recherche des directions principales virtuelles d'un élément linéaire donné. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 898—900 (1949).

Im Anschluß an das Buch von E. Cartan, Les systèmes différentiels extérieurs et leur application géométrique (Paris 1945) und mit dessen Bezeichnungen wird die Frage behandelt: Kann man eine oder mehrere Flächen zu vorgeschriebenen Bogenelementen ω_1 , ω_2 längs der Hauptkrümmungslinien finden? — Es scheint der Verfasserin entgangen zu sein, daß bereits O. Bonnet diese Frage ausführlich behandelt hat [J. Écol. polytech. 25, Cahier 42 (1867), 58ff.]. Auch in der Differentialgeometrie I von W. Blaschke (Berlin 1930), Kap. 5, insbesondere §§ 87/88 findet man eine Darstellung, die eng verwandt ist mit der Darstellung der Verf. — In der letzten Arbeit ist nur $\omega_1^2 + \omega_2^2$ gegeben. Die Bestimmung dazu passender ω_1 , ω_2 hängt im allgemeinen ab von einem System von 2 partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung in einer Unbekannten.

Ernst Witt.

Lalan, Victor: Sur le second indicatif d'un réseau asymptotique. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 900—902 (1949).

Kurze Bemerkungen über die Systeme partieller Differentialgleichungen, die 1. in den Arbeiten des vorsteh. Referats, 2. beim Darbouxschen Problem der Bestimmung der Asymptotenlinien auftreten.

Ernst Witt (Hamburg).

Chariar, V. R. and B. Singh: On a certain rectilinear congruence. J. Indian math. Soc., n. S. 13, 148—151 (1949).

Der Anstieg (pitch) p der speziellen Kongruenz der Treffgeraden zweier Kurven Γ ($v = \text{const.}$) und Γ' ($u = \text{const.}$) ist erklärt durch

$$p = - \iint \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} du dv,$$

wobei x die Länge des Geradenstückes zwischen den Kurven bedeutet. Es wird gezeigt, daß auch gilt (Druckfehler!)

$$p = - \iint \frac{\cos \omega - \cos \vartheta \cdot \cos \varphi}{x} du dv,$$

worin ω den Winkel zwischen den Tangenten von I und I' in den Treffpunkten und ϑ, φ die Winkel zwischen diesen Tangenten und dem Kongruenzstrahl bedeuten. — Verff. fragen sodann nach den von den Treffgeraden zweier Kurven gebildeten Normalenkongruenzen und finden durch einen falschen Schluß, daß die Kurven aus einem Kreis und seiner Achse bestehen müssen. Das richtige Ergebnis ist wohlbekannt: die gesuchten Normalenkongruenzen werden von den Treffgeraden zweier Fokalkegelschnitte gebildet, worunter der Fall der Verff. mit als Sonderfall vorkommt. Die zugehörigen Normalflächen sind Dupinsche Zykloiden. (Mehrere Druckfehler.)

K. Strubecker (Karlsruhe).

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

• Vranceanu, G.: *Leçons de géométrie différentielle. I: Congruences. Formes de Pfaff. Groupes continus. Invariants et équivalence. Espaces à connexion affine. Espaces de Riemann. Espaces à connexion projective.* Bucarest: L'Imprimerie „Rotativa“ 1947. 422 p.

Dies ist der erste Band, und ein zweiter Band soll folgen. Im ersten Abschnitt werden Kongruenzen und Pfaffsche Formen behandelt und es kommen dort auch Vektoren und Tensoren zur Sprache. Der zweite Abschnitt befaßt sich sodann mit endlichen Lieschen Gruppen. Im dritten Abschnitt finden sich Theoreme über Invarianz und Äquivalenz. Die letzten drei Abschnitte sind den Räumen mit affiner Übertragung, den Riemannschen Räumen und den projektiven Räumen gewidmet. Die Behauptung auf S. 219, es gäbe keine Fermischen Koordinaten für eine beliebige Kurve der A_n , ist unrichtig. Es wird fast überall der Ricci-Kalkül benutzt, leider in seiner ältesten und ungelinkigsten Form. Ob gerade dadurch, wie Verf. behauptet, ein guter Anschluß an die gelegentlich auch verwendete Cartansche Symbolik erreicht wird, wagt Referent zu bezweifeln. Viel Druckkosten hätten schon erspart werden können durch Verwendung des einfachen v. d. Waerdenschen Symbols ∂_i und der Alternierungs- und Mischungsklammern. Es nimmt wunder, daß so manches fehlt, was man in einem modernen Werke von diesem Umfange erwartet hätte, z. B. die Geometrie der Lieschen Gruppen, wo doch der zweite Abschnitt dazu eine vorzügliche Einleitung gewesen wäre; eine konsequente Einführung der anholonomen Koordinatensysteme, die die veralteten „coefficients de rotation“ und was damit zusammenhängt, überflüssig gemacht hätte; eine tiefergehende Behandlung der Einbettungsprobleme; die Deformationstheorie; die Liesche und Lagrangesche Ableitung. Immerhin begrüßen wir die Neuherausgabe mit Freuden, und der Leser wird sicher dankbar sein für das viele Gute, das geboten wird. Schouten (Epe).

Yen, Chih-Ta: *Sur une connexion projective normale associée à un système de variétés à k dimensions.* C. r. Acad. Sci., Paris 227, 461—462 (1948).

Hachtroudi (Les espaces à connexion projective normale, Actual. sci. industr.) hat gezeigt, daß ein normaler projektiver Zusammenhang (connexion) festgelegt werden kann durch ein System von $\infty^n X_{n-1}$ in X_n . Hier wird gezeigt, wie man einen solchen Zusammenhang festlegen kann durch ein System von X_k , $1 \leq k \leq n-1$, die sich als Integralmannigfaltigkeiten eines vollständig integrierbaren Systems von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung auffassen lassen, so daß durch jede lokale k -Richtung genau eine X_k des Systems geht. Es wird bewiesen, daß sich aus allen zunächst erhaltenen semi-normalen Zusammenhängen genau ein normaler auszeichnen läßt, und daß

sich die Äquivalenz zweier Systeme von V_k auf die Äquivalenz der zugehörigen normalen Zusammenhänge zurückführen läßt. *Schouten* (Epe).

Gheorghiu, Octavian Emil: Équations aux dérivés partielles et objets géométriques. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 613—615 (1948).

Verf. bestimmt die geometrischen Objekte, welche mit der partiellen Differentialgleichung $\theta(f) \equiv b^{ij} \partial_i \partial_j f + c^i \partial_i f + a f = 0$ zusammenhängen. Dabei wird vorausgesetzt, daß f und $\theta(f)$ Dichten vom Gewicht p sind. *J. Haantjes* (Leiden).

Chern, Shiing-Shen: On the characteristic classes of Riemannian manifolds. Proc. nat. Acad. Sci. USA **33**, 78—82 (1947).

Eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit M sei durch Einbettung in einen euklidischen E^{n+N} mit einer induzierten Riemannschen Metrik ausgestattet. Mit Hilfe von Abbildungen $f(M)$ der Tangentenbündel auf die Graßmannsche Mannigfaltigkeit $H(n, N)$ aller orientierten linearen n -dimensionalen Räume durch den Ursprung des E^{n+N} erklärte L. Pontrjagin [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **43**, 91—94 (1944)] eine charakteristische Kohomologieklassse von M als Bild einer Kohomologieklassse von $H(n, N)$ bei dem inversen Homomorphismus f^* und zeigte, daß gewisse charakteristische Klassen von M — die Bilder der Basis des Kohomologieringes von $H(n, N)$ mit rationalen Koeffizienten — im Sinne von de Rham durch alternierende, mit Hilfe der induzierten Riemannschen Metrik gewonnene Differentialformen bestimmt werden können. Dieses Pontrjaginsche Resultat enthält die Verallgemeinerung des Gauß-Bonnetschen Satzes von Allendoerfer [Amer. J. Math. **62**, 243—248 (1940); dies. Zbl. **24**, 351]. Die vorliegende Note beschäftigt sich nun mit der Aufgabe, diesen Satz auf eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Metrik unmittelbar gegeben ist und nicht durch Einbettung induziert wird, zu übertragen. Diese Frage erhält ihre Bedeutung dadurch, daß eine eingeprägte Metrik nicht ohne weiteres als induzierte Metrik aufgefaßt werden kann, wenn die Mannigfaltigkeit in ihrer Gesamtheit betrachtet wird. Die Hauptschritte des Beweises werden in Form von drei Lemmas gegeben und die Einzelheiten mit Verallgemeinerung auf nichtkompaktes M und affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten für später angekündigt. *Weise* (Kiel).

Segre, Beniamino: Alcune proprietà caratteristiche delle varietà a curvatura costante. — I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat., VIII. S. **6**, 393—397 (1949).

Jeder Riemannsche Raum konstanter Krümmung (S_n) läßt sich derart auf eine R_n abbilden, daß sich die geodätischen Linien der S_n in Kreise der R_n transformieren. Diese Abbildungen werden angegeben. In den folgenden Noten soll unter anderem gezeigt werden: Jede V_3 und jede konformeuklidische V_n ($n > 3$), welche sich derart auf eine R_3 abbilden läßt, daß die geodätischen Linien mit Kreisen korrespondieren, ist eine S_n . *J. Haantjes* (Leiden).

Brickell, F.: On the existence of metric differential geometries based on the notion of area. Proc. Cambridge philos. Soc. **46**, 67—72 (1950).

This paper deals with the problem of constructing an n -dimensional metric differential geometry based on a two-dimensional area given by a function $L(x^h, u^{ij})$. The function L is homogeneous of the first degree with respect to the variables u^{hi} , the coordinates of a simple bivector. It is shown that a necessary and sufficient condition for the existence of a class of functions L is the existence of functions $g_{hi}(x^h, u^{ij})$ ($g_{hi} = g_{ih}$), homogeneous of degree zero and satisfying the Pfaffian system

$$dg_{hki j} u^{ij} = 0; \quad g_{hki j} = 2g_{[i} g_{j]k}.$$

For $n = 3$ the general solution depends on an arbitrary function. For $n = 4$ there exists no general solution, only singular solutions. *J. Haantjes* (Leiden).

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Bouligand, Georges: Rôle des intégrales paratingentes en quelques types de problèmes. C. r. Acad. Sci., Paris 226, 451—453 (1948).

Die Note bezieht sich teilweise auf frühere [dies. Zbl. 30, 115, 31, 100; vgl. auch Rev. génér. Sci. pur. appl., Paris, II. S. 53, 122 (1946)]. I. Es wird angedeutet, daß im Falle möglichen Überganges zu einem höherdimensionalen Raum R' die Singularitäten (bezüglich der restringierten Topologie 1. Ordnung) der Integrale eines Systems partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung in den unabhängig bzw. abhängig Veränderlichen x, y bzw. z_1, \dots, z_n durch Projektion von Integralparatingenten aus R' in den Raum R der x, y, z_1, \dots, z_n entstehen. — II. Es werden neue Eindeutigkeitskriterien für Lösungen des Systems $p = z'_x, q = z'_y, A q'_y + B(q'_x + p'_y) + C p'_x = F$ skizziert. Diese Kriterien sind invariant gegenüber Transformationen der restringierten Topologie 2. Ordnung (und gelten daher auch für die durch solche Transformationen aus dem ursprünglichen entstehenden Systeme). *Haupt* (Erlangen).

Santaló, L. A.: Integral geometry on surfaces. Duke math. J. 16, 361—375 (1949).

Aufbauend auf älteren Theorien von Blaschke und Haimovici und auf eigenen Arbeiten dehnt Verf. das Studium der Integralgeometrie auf eine allgemeinere Flächenklasse aus, nämlich auf vollständige differentialgeometrische Flächen im Sinne von Hopf und Rinow. Zunächst wird ein grundlegender Ausdruck für die Dichte einer zweiparametrischen Mannigfaltigkeit von geodätischen Linien aufgestellt. Mit dessen Hilfe werden Integralformeln für die Menge der Geodätischen gewonnen, die eine feste Kurve endlicher Länge treffen. Danach folgen Sätze über das Maß der Geodätischen, die eine konvexe Kurve schneiden, und über Mittelwerte der Schnittpunktszahlen von Geodätischen, die einen konvexen Bereich durchdringen, mit dessen Rand. Dann werden Mengen betrachtet, deren Elemente Paare von Geodätischen sind, und Integralformeln sowie ein Satz über die Flächen zweier Bereiche, in denen Paare von Geodätischen sich mit gleichen Schnittpunktszahlen schneiden, bewiesen. Nach der Definition der kinematischen Dichte auf Flächen wird eine Verallgemeinerung der Poincaréschen Formel der Integralgeometrie gegeben. Schließlich wird eine sehr allgemeine Ungleichung für konvexe Kurven auf Flächen abgeleitet, die die isoperimetrische Ungleichung für Flächen konstanten Krümmungsmaßes als Sonderfall enthält. *Löbell* (München).

Rédei, L. und B. Sz. Nagy: Eine Verallgemeinerung der Inhaltsformel von Heron. Publ. Math., Debrecen 1, 42—50 (1949).

Das Produkt der (algebraischen) Inhalte I, J zweier Polygone $A_1 A_2 \dots A_m$ und $B_1 B_2 \dots B_m$ in der Ebene läßt sich darstellen in der Form

$$16 IJ = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \begin{vmatrix} r_{ik}^2 & r_{i,k+1}^2 \\ r_{i+1,k}^2 & r_{i+1,k+1}^2 \end{vmatrix},$$

wobei r_{ik} den Abstand der Ecken A_i und B_k darstellt. i ist hier mod m , k ist mod n zu nehmen. Die Darstellung ist eindeutig in dem Sinne, daß kein Polynom höchstens vierter Ordnung in nm Veränderlichen identisch verschwindet, wenn man für diese die nm Abstände von n beliebigen Punkten zu m anderen beliebigen Punkten einsetzt. Durch Grenzübergang folgt für zwei geschlossene Kurven $\xi(u)$ und $\eta(v)$ vom Umfang U bzw. V :

$$8IJ = \int_0^U \int_0^V r^2 \cdot u \cdot v \cdot du \cdot dv.$$

u und v sind hier Bogenlängen, $\xi' = u$ und $\eta' = v$ Einheitsvektoren in den Tangenten. w entsteht aus v durch Spiegelung an der Verbindungsgeraden von ξ und η , r ist die Länge der Strecke zwischen diesen Punkten. — Hieraus folgen bemerkens-

werte Ungleichungen, insbesondere $8IJ \leq UV(T_1 + T_2)$, wobei T_i die Trägheitsmomente der homogen mit der Masseneinheit je Längeneinheit belegten Kurven sind in bezug auf ein Zentrum, aus dem die Schwerpunkte dieser Belegungen unter einem rechten Winkel gesehen werden. — Spezialisierung sämtlicher Betrachtungen auf den Fall, daß beide Polygone bzw. Kurven zusammenfallen. *Bol* (Freiburg).

Busemann, Herbert: The isoperimetric problem in the Minkowski plane. *Amer. J. Math.* 69, 863—871 (1947).

In der Arbeit werden die folgenden Resultate hergeleitet. $F(x, y)$ sei positiv für $(x, y) \neq 0$ und positiv homogen 1. Ordnung. Die Aufgabe, unter allen einfach geschlossenen ebenen Kurven $x(t), y(t)$ mit gegebener Orientierung und der Minkowskischen Länge $L = \int F(x, y) dt$ eine zu finden, welche die Fläche größten Inhaltes (im euklidischen Sinne) einschließt, hat immer eine bis auf Translationen eindeutige Lösung. Es kommt nicht darauf an, ob die Eichkurve (Indikatrix) $C: F(x, y) = 1$ konvex ist oder nicht. Ist C nicht konvex, so ist die Lösung diejenige, auf welche der Rand C der konvexen Hülle von C als Indikatrix führt. Sie ist homothetisch zur Figuratrix hinsichtlich C , d. h. zu der um $\pm \pi/2$ gedrehten reziproken Polaren von C bezüglich $x^2 + y^2 = 1$. — In Finslerschen Räumen muß C eine konvexe Mittelpunktskurve sein, damit die Problemstellung Sinn hat. Da Finslerscher und Minkowskischer Flächeninhalt sich vom Euklidischen nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, ist das Finslersche Problem mit dem Minkowskischen gelöst. Man kann die Lösung im Sinne der Minkowskischen Geometrie beschreiben, indem man sagt: Sie ist eine Kurve K der Länge L , deren Wahl als neue Indikatrix bewirkt, daß von zwei Geraden g und h , jetzt h orthogonal (transversal) zu g ist, während bezüglich C als Indikatrix g orthogonal zu h war, und umgekehrt. Eine Gerade g heißt orthogonal zu h , wenn eine Parallele zu g durch den Mittelpunkt der Indikatrix diese in Punkten schneidet, in welchen sie zu h parallele Stützgeraden besitzt. Die Lösung ist im allgemeinen kein Minkowski-Kreis. Das Ergebnis bezüglich einer nicht konvexen Indikatrix C legt die Frage nach den Beziehungen zwischen den Längen L und \bar{L} einer Kurve nahe, welche durch C und \bar{C} definiert werden. Diese Frage wird im letzten Abschnitt der Arbeit für allgemeine n -dimensionale Finslersche Räume beantwortet in dem Sinne, daß die entsprechenden Lebesgueschen Längen gleich sind. Das wesentliche Element in der Beweisführung hinsichtlich des isoperimetrischen Problems ist die klassische Brunn-Minkowskische Ungleichung $[D, K]^2 \geq [D, D][K, K]$, welche den sogenannten gemischten Flächeninhalt zweier Ovale mit dem Produkt ihrer Flächeninhalte verknüpft. Zieht man nämlich zunächst zur konvexen Indikatrix C nur konvexe Vergleichskurven D in Betracht, die man durch eine Stützfunktion definiert, so erweist sich nach dem üblichen Übergang auf den Einheitskreis die Länge L gerade als das Zweifache des gemischten Flächeninhaltes von D und des Ovals K , das aus der Figuratrix durch eine Drehung um $\pm \pi/2$ hervorgeht. Für nicht konvexe Kurven hat man noch hinzuzunehmen, daß bei konvexer Indikatrix die euklidische Gerade kürzeste Verbindung zweier Punkte ist, und kann wie üblich schließen. Von den klassischen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen, denen die fundamentale Ungleichung unterliegt, befreit man sich durch die Bemerkung, daß jedes Oval durch analytische approximierbar ist. — Hinsichtlich der Funktion $\bar{F}(x, y)$, welche durch die Relation $\bar{F} = 1$ die konvexe Hülle \bar{C} einer nicht konvexen Indikatrix C liefert, erkennt man unmittelbar $\bar{F}(x, y) \leq F(x, y)$, woraus die Ungleichung $\bar{L}(D) \leq L(D)$ für die Längen irgendeiner Kurve D , bezogen auf C und \bar{C} , folgt. Ist K die C entsprechende reziproke Polare bezüglich des Einheitskreises und K das aus ihr durch Rotation um $\pm \pi/2$ hervorgehende Oval, so erhält man $L^2 \geq \bar{L}^2 \geq [D, D] \cdot [K, K]$. — Aus der Entstehung von K folgt nun leicht, daß diese Kurve keine Tangente haben kann, die Parallele zu einem Radius OP nach einem inneren Punkt einer Strecke auf C ist, und daraus geht die Gleichung $\bar{L} = L$ für jedes zu K homothetische Oval hervor. (Tangente heißt jede Stützgerade, die mindestens entweder rechts- oder linksseitige Tangente ist.) Das oben angeführte Resultat folgt aus dem Vorangehenden unmittelbar. Auf die Lösung des Problems im Finslerschen Fall führt der Ausdruck für den Minkowskischen Flächeninhalt

$$M(D) = 2\pi [D, D] \int_0^{2\pi} \varrho^{-2}(\theta) d\theta,$$

wobei $r = \varrho^{-1}(\theta)$ die Gleichung von C ist. Es gilt $L^2(D) \geq \pi^{-1} M(D) \int_0^{2\pi} (\varrho^2 - \varrho'^2) d\theta \int_0^{2\pi} \varrho^{-2} d\theta$, und für das Gleichheitszeichen ist die oben angegebene Verknüpfung zwischen den Orthogonalitäten notwendig und hinreichend. — Die damit zusammenhängende Frage, wann die Lösung ein Minkowskischer Kreis sei, führt den Verf. auf einen elementaren Beweis der Ungleichung I

für Polygone. — Die Beziehung zwischen den Längen einer Kurve, bezogen einmal auf eine nicht konvexe Indikatrix C , und dann auf den Rand C ihrer konvexen Hülle, wird durch einen Beweisgang gewonnen, welcher sich eng an Untersuchungen des Verf. und W. Mayers (dies. Zbl. 24, 417) anschließt. *Baebler* (Zürich).

Day, Mahlon M.: Polygons circumscribed about closed convex curves. Trans. Amer. math. Soc. 62, 315—319 (1947).

Es sei $\lambda_i > 0$ und $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = 1$. (A) Ist C eine geschlossene konvexe Kurve ohne Flachstellen und $n \geq 3$, so gibt es ein der Kurve C umschriebenes Polygon P mit n Seiten, welche durch die Berührungspunkte mit C im vorgeschriebenen Verhältnis λ_i geteilt werden. (B) Ist C zentralsymmetrisch und $n \geq 2$, so gibt es ein ebenfalls zentralsymmetrisches umschriebenes Polygon P mit $2n$ Seiten, welche durch die Berührungspunkte mit C entsprechend im Verhältnis λ_i bzw. λ_i^{-1} geteilt werden. — Verf. gibt interessante Beweise dieser Theoreme, welche auf einen sich auf stetige eindeutige und flächentreue Selbstabbildungen eines ebenen Ringbereiches beziehenden Fixpunktsatzes von Poincaré zurückgreifen. — In dem speziellen Fall $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$ kann der Beweis der Theoreme (A) und (B) auch auf Grund der geläufigen Tatsache erbracht werden, daß das umschriebene Polygon kleinsten Flächeninhalts die in Frage stehende Eigenschaft aufweist. Nach dieser Methode behandelt Verf. einige Erweiterungen, die sich auf k -dimensionale geschlossene konvexe Flächen und umschriebene Polyeder beziehen. *Hadwiger*.

Orts, J. Ma.: Über die Abschätzung des isoperimetrischen Defizits einiger konvexer Kurven. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 8, 291—297 (1948) [Spanisch].

Es sei $\varrho = \varrho(\theta)$ die Gleichung einer konvexen Kurve in Polarkoordinaten. Eine einfache Anwendung der Schwarzschen Ungleichung ergibt für das isoperime-

trische Defizit die Abschätzung $L^2 - 4\pi A \leq 2JA$, wobei $J = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^2 d\theta$ ist.

Verf. diskutiert einige Spezialfälle elementarer Kurven; beispielsweise für die Ellipse mit den Halbachsen a, b ergibt sich $L^2 - 4\pi A \leq 2\pi(a-b)^2$. *H. Hadwiger*.

Orts, J. Ma.: Über einen Rechenfehler. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 9, 34 (1949) [Spanisch].

Aus der Abschätzung des isoperimetrischen Defizits für die Ellipse (vgl. vorstehendes Referat) ergibt sich $L \leq 2\pi\sqrt{(a^2 + b^2)/2}$ an Stelle eines in einer Schlußbemerkung unrichtig angegebenen Ausdruckes. *H. Hadwiger* (Bern).

Topologie:

Eilenberg, Samuel: On the problems of topology. Ann. Math., Princeton, II. S. 50, 247—260 (1949).

Zusammenstellung von 46 topologischen Problemen, die von den Teilnehmern der topologischen Sektion der Konferenz über „Die Probleme der Mathematik“ im Dezember 1946 in Princeton vorgetragen wurden. Der Bericht gliedert sich in die Abschnitte: 1. Linsenräume. 2. Retrakte und lokaler Zusammenhang. 3. Homotopiegruppen. 4. Homotopiegruppen von Sphären. 5. Homotopieklassen von Abbildungen. 6. Gefaserte Räume. 7. Homologietheorie. 8. Beziehungen zwischen Homologie und Homotopie. 9. Transformationsgruppen. *Seifert* (Heidelberg).

Appert, Antoine: Double limite et prolongement. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 865—867 (1949).

L'A. étend les théorèmes classiques de la double limite et du prolongement par continuité (tels qu'ils sont par exemple démontrés dans N. Bourbaki, Topologie générale, chap. I, p. 49—50 et 38) au cas où les espaces qui interviennent ne sont plus des „espaces topologiques“ au sens de N. Bourbaki, mais satisfont à des axiomes moins restrictifs, que précise l'A. *J. Dieudonné* (Nancy).

Serre, J. P.: Compacité locale des espaces fibrés. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 1295—1297 (1949).

Soient E un espace topologique séparé, où opère un groupe G , R le graphe de la relation d'équivalence définie par G , B la base de E (on suppose R fermé, donc B séparé). Si G est compact et B compact (resp. localement compact), E est compact (resp. localement compact). On dit que E est espace fibré principal de groupe G si G opère simplement dans E et si l'application de R dans G qu'on peut alors définir est continue. Tout espace fibré principal de groupe et de base localement compacts est localement compact; en particulier, si l'espace homogène d'un groupe Γ par un sous-groupe localement compact est localement compact, Γ est localement compact; toute extension d'un groupe localement compact par un groupe localement compact est donc localement compacte.

Jean Braconnier (Lyon).

Gottschalk, W. H.: Transitivity and equicontinuity. Bull. Amer. math. Soc. **54**, 982—984 (1948).

Es sei X ein metrischer Raum mit der Metrik ϱ und G eine Gruppe von Homöomorphismen auf X . G heißt „algebraisch transitiv“, wenn die Transformationen von G jeden Punkt $x \in X$ in jeden anderen Punkt von X überführen. G heißt „topologisch transitiv“, wenn die Bilder von x mittels der Transformationen von G in X überall dicht sind. G heißt „gleichgradig stetig“ (equicontinuous), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für $x, y \in X$ aus $\varrho(x, y) < \delta$ folgt: $\varrho(g(x), g(y)) < \varepsilon$ für beliebiges g aus G . Bewiesen wird der Satz: Wenn X ein kompakter metrischer Raum ist, wenn G eine topologisch transitive Gruppe von Homöomorphismen auf G ist, und wenn H die Gruppe derjenigen Homöomorphismen auf X ist, für die gilt: $g \cdot h = h \cdot g$ ($g \in G, h \in H$), so sind die folgenden Aussagen paarweise äquivalent: 1. H ist algebraisch transitiv, 2. H ist gleichgradig stetig, 3. G ist gleichgradig stetig.

Thimm (Bonn).

Hu, Sze-Tsen: On Lipschitz mappings. Portugaliae Math. **7**, 45—49 (1948).

H. Whitney hat in der Arbeit „Algebraic topology and integration-theory“ (dies. Zbl. **29**, 420) den Begriff der „Lipschitz-Abbildung“ eingeführt: Es seien X und Y metrische Räume, ϱ bezeichne (in beiden Räumen) die Entfernung. Eine stetige Abbildung von X in Y heißt Lipschitz-Abbildung, wenn eine positive Zahl N existiert, derart, daß $\varrho(f(x_1), f(x_2)) \leq N \varrho(x_1, x_2)$ für ein beliebiges Punktpaar x_1, x_2 aus X gilt. Verf. beweist u. a. folgende Eigenschaften der Lipschitz-Abbildungen: 1. K und L seien endliche Komplexe. Jede simpliziale Abbildung $K \rightarrow L$ ist eine Lipschitz-Abbildung. (Die Schlußweise des Beweises kann durch Gegenbeispiele widerlegt werden.) 2. Für metrische Räume X, Y, Z gilt: Wenn $X \rightarrow Y$ und $Y \rightarrow Z$ Lipschitz-Abbildungen sind, so auch $X \rightarrow Z$. 3. Wenn $f: X \rightarrow E^m$ eine stetige Abbildung eines n -dimensionalen Kompaktums X in einen m -dimensionalen Euklidischen Raum E^m ist, dann existiert für jedes $\eta > 0$ eine Lipschitz-Abbildung $g: X \rightarrow E^m$, so daß für jedes x aus X gilt: $\varrho(f(x), g(x)) < \eta$. Ein Kompaktum Y endlicher Dimension heißt nach H. Whitney (vgl. loc. cit.) Lipschitz-Raum, wenn Y den folgenden Bedingungen genügt: a) Es gibt eine Homöomorphie $h: Y \rightarrow Y_1$, wobei Y_1 Teilmenge eines Euklidischen Raumes E^m ist, so daß h und h^{-1} Lipschitz-Abbildungen sind. b) Es gibt einen Lipschitz-Retrakt $\theta: U \rightarrow Y_1$ einer offenen Menge $U \supset Y_1$ auf Y_1 . Verf. beweist: X sei ein Kompaktum endlicher Dimension und Y ein Lipschitz-Raum. Wenn zwei Abbildungen von X auf Y homotop sind, so sind sie auch Lipschitz-homotop.

Thimm (Bonn).

Scorza Dragoni, Giuseppe: Su una questione di topologia. Giorn. mat. Battaglini, IV. S. **78**, 121—127 (1949).

Sei K eine abgeschlossene Teilmenge des Rechtecks $J: a_i \leq x_i \leq b_i$ ($i = 1, \dots, n$) und $s(\xi)$ der Schnitt von K mit dem linearen Raum $x_i = \xi_i$

($1 \leq i \leq n - r$). Für jede Komponente $\sigma(\xi)$ von $s(\xi)$ strebe der Abstand $(s(\eta), \sigma(\xi))$ gegen Null für $\eta \rightarrow \xi$. Man wünscht Angaben über den Zusammenhang von $J - K$. Im Falle $r = 1$ wird gezeigt, daß jeder stetige Bogen, der $x_n = a_n$ mit $x_n = b_n$ in J verbindet, die Menge K trifft; im Falle $r = n - 1$ trifft K jedes Teilkontinuum von J , das die Seiten $x_1 = a_1$ und $x_1 = b_1$ trennt. Die Beweise benutzen mehrwertige Funktionen einer Veränderlichen mit gewissen Halbstetigkeitseigenschaften und solche Funktionen mehrerer Veränderlicher, die die Halbstetigkeitseigenschaften auf allen Geraden haben. *H. Kneser (Tübingen).*

Kelley, J. L.: Simple links and fixed sets under continuous mappings. *Amer. J. Math.* **69**, 348—356 (1947).

Es sei M ein Kompaktum. Ist $p \in M$, so werden alle Punkte q von M mit der Eigenschaft, daß kein Punkt von M die Punkte p und q trennt, zur Menge M_p zusammengefaßt. Eine Teilmenge von M heißt ein einfaches Glied („simple link“), abgekürzt e. G., von M , wenn sie entweder nur aus einem „Endpunkt“, oder nur aus einem „Zerschneidungspunkt“ von M besteht oder ein mehrpunktiges M_p ist, wo p ein Nicht-Zerschneidungspunkt von M . Es wird eine Reihe von Sätzen über verschiedene Zusammenhangseigenschaften der e. G. bewiesen. Eine auf Kontinuen bezügliche Eigenschaft heißt (e. G.)-ausstrahlend, wenn sie, falls sie für jedes e. G. von M gilt, auch für M zutrifft, umgekehrt (e. G.)-einstrahlend, wenn sie, falls sie für M gilt, auch für jedes e. G. von M besteht. Die „Fixpunkteigenschaft“, d. h. die Eigenschaft eines Kontinuums, bei jeder topologischen Selbstabbildung einen Fixpunkt zu besitzen, ist, wie Beispiele lehren, nicht (e. G.)-einstrahlend; aber sie ist (e. G.)-ausstrahlend. Dieses letzte Ergebnis wird durch eine nähere Betrachtung des Verhaltens der Fixpunktmenge einer stetigen Abbildung von M in sich gegen die e. G. von M gewonnen, wobei u. a. folgender Satz bewiesen wird: Zu jeder stetigen Abbildung T von M in sich gibt es ein e. G., welches ein Teilkontinuum K enthält mit $T(K) \supset K$. Dieser Satz enthält als weitere Folgerungen ein Ergebnis von W. L. Ayres [*Fundam. Math.*, Warszawa **16**, 333—336 (1930)] und den Fixsatz von Scherrer [*Math. Z.* **24**, 129 (1926)]. *Aumann.*

Roberts, J. H.: Open transformations and dimension. *Bull. Amer. math. Soc.* **53**, 176—178 (1947).

Eine eindeutige Abbildung f eines separablen, metrischen Raumes A in einen ebensolchen Raum B heißt offen, wenn das Bild $f(U)$ jeder offenen Menge aus A eine offene Menge in B ist. Verf. zeigt: 1. Es existieren dimensionserhöhende, offene Abbildungen, bei denen jeder Bildpunkt höchstens abzählbar viele Urbilder hat. 2. Es existieren dimensionerniedrigende, offene, eineindeutige Abbildungen. 3. Ist $f(A) = B$ offen, B lokal kompakt und $f^{-1}(y)$ nicht in sich dicht für jedes $y \in B$, so ist $\dim B \leq \dim A$. *Nöbeling (Erlangen).*

Bokštejn (Bockstein), M.: Über die Dimension eines topologischen Produktes. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **63**, 221—223 (1948) [Russisch].

Es werden Formeln angegeben, welche es gestatten, die (Homologie-)Dimensionen des topologischen Produktes zweier Bikomakta aus den Dimensionen der Faktoren zu berechnen. Zugrunde gelegt werden den Homologieuntersuchungen verschiedene Koeffizientenbereiche. Charakteristisch für die angegebenen Formeln ist, daß zu der Ausrechnung der Dimension des Produktes bezüglich eines dieser Koeffizientenbereiche auch die Dimensionen der Faktoren bezüglich anderer Koeffizientenbereiche herangezogen werden müssen. Verf. führt vier verschiedene Arten von Invarianten ein, die mit den Dimensionen verknüpft sind. Als Beispiel werde die Definition von $D_0(A)$ angegeben: A sei ein Bikomaktum. Die größte Zahl q , derart, daß sich in A eine Teilmenge A' vom Typ G_0 findet (d. h. A' ist Differenz zweier offener Teilmengen des Bikomaktums A), derart, daß die q -dimensionale Homologiegruppe über dem Koeffizientenbereich der ganzen Zahlen ein Element unendlich hoher Ordnung enthält, sei $D_0(A)$. Die Invarianten des topo-

logischen Produktes lassen sich aus den Invarianten der Faktoren berechnen. Bezüglich vieler Einzelheiten (auch der Bezeichnungen) und der Beweise verweist der Verf. auf frühere Arbeiten, die z. T. Ungenauigkeiten enthielten, welche durch die vorliegende Arbeit berichtigt werden. *Thimm* (Bonn).

Dowker, C. H.: An extension of Alexandroff's mapping theorem. *Bull. Amer. math. Soc.* **54**, 386—391 (1948).

Es sei R ein topologischer Raum und \mathfrak{U} eine Überdeckung (beliebiger Mächtigkeit) von R durch (offene) Mengen U_α . Der Nerv von \mathfrak{U} ist ein simpliziales Polytop, dessen Ecken u_α den U_α eindeutig zugeordnet sind und wobei ein System dieser Ecken dann und nur dann ein Simplex aufspannt, wenn der Durchschnitt der diesen Ecken entsprechenden U_α nicht leer ist. Man kann dieses Polytop mittels der baryzentrischen Koordinaten metrisieren (natürlicher Nerv) oder topologisieren, indem man die Sterne jeder Ecke v [= Vereinigung aller (offenen) Simplexe mit der Ecke v] wiederholter regulärer Unterteilungen zur Basis der offenen Mengen macht (geometrischer Nerv); die natürliche und die geometrische Topologie sind äquivalent dann und nur dann, wenn die lokale Dimension des Polytops endlich ist. Eine eindeutige, stetige Abbildung von R in den Nerv von \mathfrak{U} heißt kanonisch bezüglich \mathfrak{U} , wenn das Urbild des Sterns jeder Ecke u_α in U_α enthalten ist. Der fundamentale Überführungssatz von Alexandroff (modifiziert durch Kuratowski und Lefschetz) behauptet unter gewissen Bedingungen die Existenz kanonischer Abbildungen. Verf. gibt die genauen Bedingungen an: 1. Ist R normal, so existiert für eine Überdeckung \mathfrak{U} eine kanonische Abbildung in den zugehörigen natürlichen Nerv dann und nur dann, wenn \mathfrak{U} eine lokal endliche Verfeinerung \mathfrak{B} besitzt (d. h. \mathfrak{B} ist ebenfalls eine Überdeckung von R durch offene Mengen, jede Menge von \mathfrak{B} ist in einer Menge von \mathfrak{U} enthalten, jeder Punkt von R besitzt eine Umgebung, die mit höchstens endlich vielen Mengen von \mathfrak{B} nicht leere Durchschnitte hat). 2. Es existiert eine kanonische Abbildung von R in den natürlichen Nerv für jede Überdeckung von R dann und nur dann, wenn R normal und parakompakt ist (d. h. jede Überdeckung von R hat eine lokal endliche Verfeinerung). — Verf. zeigt außerdem: Ist \mathfrak{U} eine Überdeckung von R , so existiert eine kanonische Abbildung in den geometrischen Nerv dann und nur dann, wenn eine kanonische Abbildung in den natürlichen Nerv existiert. *Nöbeling* (Erlangen).

Begle, Edward G.: A note on local connectivity. *Bull. Amer. math. Soc.* **54**, 147—148 (1948).

Ein Raum T heißt p -LC in einem Punkt x , wenn jede Umgebung U von x eine Umgebung V von x enthält derart, daß jede stetige p -Sphäre in V eine stetige $(p+1)$ -Zelle in U berandet. T heißt p -LC, wenn er p -LC ist in jedem Punkt, und LC^n , wenn er p -LC ist für $0 \leq p \leq n$. Verf. zeigt: Ist T LC^n , so hat jeder Punkt von T beliebig kleine Umgebungen V derart, daß jede p -Sphäre ($0 \leq p \leq n$) in V eine stetige $(p+1)$ -Zelle in V berandet. *Nöbeling* (Erlangen).

Cartan, Henri: Sur la cohomologie des escapes où opère un groupe: notions algébriques préliminaires. *C. r. Acad. Sci., Paris* **226**, 148—150 (1948).

Une anneau A est gradué si son groupe additif est somme directe de sous-groupes A^q (q entier ≥ 0) tels que $A^p \cdot A^q \subset A^{p+q}$; A est filtré s'il contient une suite d'idéaux bilatères A_p vérifiant: $A_p \subset A_q$ si $p > q$, $A_0 = A$, $\bigcap_p A_p = \{0\}$; à un anneau filtré A correspond un anneau gradué A' dont le groupe additif est la somme directe des groupes A_p/A_{p+1} , le produit y étant défini par passage au quotient à partir du produit dans A ; A est différentiel s'il possède un automorphisme involutif ω et un endomorphisme δ (les 2 pour la structure additive) vérifiant:

$$\delta(xy) = (\delta x)y + (\omega x)\delta y, \quad \delta\delta = 0, \quad \delta\omega + \omega\delta = 0;$$

l'anneau de cohomologie $H(A)$ de A est le quotient de l'anneau des zeros de δ par δA . $H(A)$ est filtré si A l'est [et si $\delta(A_p) \subset A_p$, $\omega(A_p) = A_p$], gradué si A l'est (et si

$\delta A^p \subset A^{p+r}$, r unabhängig von p , ist der Grad von δ). A ist normal, wenn $r = 1$ und $\omega x = (-1)^p x$ wenn $x \in A^p$. Ein Ring mit Filtration entspricht einer Folge von Leray-Koszul-Ringen E_r differenziell graduert ($r = 0, 1, \dots$). $E_0 = A$, $E_{r+1} = H(E_r)$, $E_\infty =$ Ring graduert von $H(A)$. Man kann auch betrachten auf A mehrere Graduierungen und Filtrationen erfüllend gewisse Bedingungen der Kompatibilität. Die E_r relativ zu einer Filtration haben dann mehrere Graduierungen. [Für alle diese Begriffe siehe auch Leray, J. Math. pur. appl., Paris, IX. S. 29, 1–139 (1950).] A. Borel (Paris).

Cartan, Henri: Sur la cohomologie des espaces où opère un groupe: étude d'un anneau différentiel où opère un groupe. C. r. Acad. Sci., Paris 226, 303–305 (1948.)

Sei A ein Ring differenziell normal (siehe oben) und G eine Gruppe von Endomorphismen von A , vertauschbar mit δ und anwendend auf jedes A^q auf sich selbst. Sei $a^{p,q}$ der Ring additiver Funktionen $f(s_0, \dots, s_p)$, ($s_0, \dots, s_p \in G$), mit Werten in A^q . Die A definiert auf der direkten Summe a der $a^{p,q}$ ein Produkt, eine Differentielle, die in a einen Ring differenziell normal bigraduiert. G operiert auf a durch: $sf(s_0, \dots, s_p) = s[f(s^{-1}s_0, \dots, s^{-1}s_p)]$. Sei $H(G, A)$ der Ring der Cohomologie des unteren Rings, der aus den Elementen von a invariant unter G besteht. Er hat eine Graduierung und 2 Filtrationen. Die Untersuchung der Folgen von Leray-Koszul relativ zu diesen 2 Filtrationen liefert, wie Anwendungen, die Sätze: Sei \mathcal{C} ein Raum lokal kompakt, auf dem eine Gruppe G , $H(\mathcal{C})$ sein Ring der Cohomologie (singuliere oder Čech, mit Koeffizienten irgendwelcher Art). Dann existiert eine Folge von Leray-Koszul beginnend mit dem Ring trigradiert $H(G, H(\mathcal{C}))$, der ein topologischer Invariant von \mathcal{C} mit G ist. Wenn \mathcal{C} die Vereinigung abzählbarer kompakter Räume ist und wenn G diskontinuierlich ohne Fixpunkte ist, dann hat der Ring der Cohomologie des Quotientenraums \mathcal{C}/G eine Filtration, die dem Ring graduert entsprechend dem Ring terminal der Folge von Leray-Koszul vorhergehend erwähnt ist. A. Borel (Paris).

Postnikov, M. M.: Bau des Schnittringes dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 61, 795–797 (1948) [Russisch].

Es wird ein Beweis des folgenden Satzes skizziert: Ein Ring M ist dann und nur dann der Schnittring mod 2 einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit, wenn er folgende Bedingungen erfüllt: 1. Die additive Gruppe von M gestattet eine direkte Zerlegung $\Delta^0 + \Delta^1 + \Delta^2 + \Delta^3$, wobei $\Delta^0 = (q)$, $2q = 0$; $\Delta^1 = (u_1) + \dots + (u_p)$, $2u_i = 0$; $\Delta^2 = (v_1) + \dots + (v_p)$, $2v_i = 0$; $\Delta^3 = (e)$, $2e = 0$. 2. M ist kommutativ und hat das Einselement e . 3. Für $x \neq e$ ist $xq = 0$. 4. Für alle $u, u' \in \Delta^1$ ist $uu' = 0$. 5. $u_i v_j = \delta_{ij} q$ (Dualitätssatz von Poincaré-Veblen). 6. Für alle $v, v' \in \Delta^2$ ist $vv' \in \Delta^1$. 7. Es existiert ein $v_0 \in \Delta^2$, so daß für alle $v, v' \in \Delta^2$ gilt $vvv' + vv'v = vv'v_0$. Beim Beweis von „nur dann“ sind die Eigenschaften 1.–6. bekannt. In 7. ist für eine orientierbare Mannigfaltigkeit $v_0 = 0$, für eine nichtorientierbare ist v_0 die Homologieklass mod 2 eines erzeugenden Elements der (ganzzahligen) zweidimensionalen Torsionsgruppe. Der Beweis von „dann“ wird durch Induktion nach p geführt.

Burger (Frankfurt a. M.).

Postnikov, M. M.: Klassifikation der stetigen Abbildungen eines dreidimensionalen Polyeders in ein einfach-zusammenhängendes Polyeder beliebiger Dimension. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 61, 461–462 (1949) [Russisch].

Es werden die Homotopieklassen der stetigen Abbildungen eines beliebigen zusammenhängenden, einfach zusammenhängenden, dreidimensionalen Polyeders K in ein Polyeder Y beliebiger Dimension mittels der Homotopiegruppen $\pi_2(Y)$ und $\pi_3(Y)$ vollständig charakterisiert. 1. Die stetige Abbildung des Komplexes K in das Polyeder Y heißt „normal“, wenn alle eindimensionalen Simplexe von K auf denselben Punkt von Y abgebildet werden. Jede Abbildung von K in Y ist einer normalen Abbildung homotop. 2. f sei eine normale Abbildung und σ^2 ein zweidimensionales, orientiertes Simplex von K . Da f auch σ^2 in Y abbildet, entspricht f ein Element $d(f, \sigma^2)$ der Homotopiegruppe $\pi_2(Y)$. Die Kette $d^2(f) = \sum_{\sigma^2 \in K} d(f, \sigma^2) \sigma^2$,

deren Koeffizientenbereich also $\pi_2(Y)$ ist, ist ein Co-Zyklus und wird charakteristischer Zyklus von f genannt. Homotope normale Abbildungen haben homologe charakteristische Zyklen. Wenn zwei normale Abbildungen f und g homologe charakteristische Zyklen haben, gibt es eine Abbildung, die zu f homotop ist und mit g auf allen zweidimensionalen Simplexes von K übereinstimmt. Für solche Abbildungen wird die folgende Bezeichnung eingeführt: f und g bilden ein „normales Paar“. 3. f und g seien normale Abbildungen, die ein normales Paar bilden. Ist σ^3 ein dreidimensionales orientiertes Simplex von K , so kann durch Zusammenfassen zweier Exemplare von σ^3 , σ_0^3 und σ_1^3 , zu einer Sphäre eine stetige Abbildung dieser Sphäre in Y bestimmt werden, die auf σ_0^3 mit f und auf σ_1^3 mit g übereinstimmt. Dieser Abbildung entspricht ein Element $d^3(f, g; \sigma^3)$ der Homotopiegruppe $\pi_3(Y)$. Die Kette: $d^3(f, g) = \sum_{\sigma^3 \in K} d(f, g; \sigma^3) \sigma^3$ ist ein Co-Zyklus. Es werde jetzt das Hauptergebnis

der Arbeit formuliert: Die beiden Abbildungen f und g eines normalen Paares sind dann und nur dann homotop, wenn ein eindimensionaler Co-Zyklus e^1 [Koeffizientenbereich $\pi_2(Y)$] existiert, derart, daß die Homologiegleichung

$$\{d^3(f, g)\} = \{e^1\} \cup \{d^2\} + \{e^1\} * \{e^1\}$$

besteht. In dieser Formel ist: $d^2 = d^2(f) = d^2(g)$; \cup bezeichnet die von Whitehead eingeführte Produktbildung [Ann. Math., Princeton, II. S. 42, 409—427 (1941); dies. Zbl. 27, 264]; $e^1 * e^1$ ist ein Produkt von Co-Zyklen, bei dessen Definition auch der Aufbau der Gruppen $\pi_2(Y)$ und $\pi_3(Y)$ eine Rolle spielt. *Thimm.*

Frucht, Robert: On the groups of repeated graphs. Bull. Amer. math. Soc. 55, 418—420 (1949).

Es sei \mathfrak{G} ein zusammenhängender Graph mit n Ecken, ohne einfache Schlingen (loops), es sei \mathfrak{H} seine Gruppe der Ordnung h . Ist dann Γ der Graph, der aus m Kopien G_1, G_2, \dots, G_m des gleichen Graphs G besteht, so ist die Gruppe von Γ die durch \mathfrak{H} erweiterte symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_m(\mathfrak{H})$ der Ordnung $m!h^m$, Polyas Gruppenkranz [G. Polyá, Acta math., Uppsala 68, 145—254 (1937); W. Specht, Schr. math. Inst. angew. Math. Univ. Berlin 1, 1—32 (1932); dies. Zbl. 17, 232, 4, 338]. — Hieraus folgt in einfacher Weise ein Satz von I. N. Kagno über den Pappuschen Graph mit 9 Ecken und 27 Bögen und ähnliche [I. N. Kagno, Amer. J. Math. 68, 505—520 (1946); 69, 859—862 (1947)]. *Specht* (Erlangen).

Frucht, Robert: Graphs of degree three with a given abstract group. Canadian J. Math. 1, 365—378 (1949).

Der Verf. greift auf ein Problem zurück, dessen Lösbarkeit er bereits in einer früheren Publikation bewiesen hat. Der Zweck der vorliegenden Arbeit besteht hauptsächlich darin, daß der früheren Lösung eine in gewissem Sinne einfachere an die Seite gestellt wird. Das betrachtete Problem lautet: Gibt es zu jeder endlichen Gruppe \mathfrak{H} Streckenkomplexe (Graphen) G , deren Automorphismengruppe 1-isomorph zu G ist? Verf. zeigt, daß solche Graphen immer existieren, sogar dann, wenn man sich auf solche beschränkt, die regulär vom 3. Grad (kubisch) sind. — Im einzelnen wird bewiesen: Ist G zyklisch und ihre Ordnung $h > 2$, so kann man einen zugehörigen kubischen Graphen der Ordnung $6h$ angeben. — Für eine nicht zyklische Gruppe der Ordnung $h \geq 3$ mit n Erzeugenden hat der zugeordnete kubische Graph die Ordnung $2(n+2)h$. — Läßt man die Beschränkung auf reguläre kubische Graphen fallen, so kann man die Ordnungen der zugeordneten Graphen senken, und zwar folgendermaßen: Für zyklische Gruppen der Ordnung $h > 3$ existieren bereits zugeordnete Graphen der Ordnung $3h$, bei beliebigen endlichen nicht zyklischen Gruppen mit n Erzeugenden lassen sich zugeordnete Graphen der Ordnung $2nh$ angeben. Für die Gruppen mit niedrigeren Ordnungszahlen, also 1, 2 evtl. 3 werden spezielle Graphen angegeben. Ob und wiefern die Ordnungen der zugeordneten Graphen weiter gesenkt werden können, bleibt noch zu klären. — Die Beweise werden an Hand eines

Strukturschemas für die Streckenkomplexe geführt. Dieses Schema ist eine quadratische Form mit Koeffizienten 1, welche die Struktur nach einer geläufigen Vorschrift in dem Sinne beschreibt, daß die Knotenpunkte und die Variablen einerseits, die Kanten und Summanden der Form andererseits einander eindeutig zugeordnet werden, es handelt sich also um ein Inzidenzschema. Die Automorphismengruppe ist dann 1-isomorph zur Gruppe der Permutationen der Variablen, welche die Form ungeändert lassen. Die regulären kubischen Graphen zeichnen sich dadurch aus, daß sich die Struktur der Automorphismengruppe besonders leicht überblicken läßt. Dazu trägt insbesondere der vom Verf. eingeführte Begriff des Typus $[\kappa, \lambda, \mu]$ eines Knotenpunktes P bei. $\kappa \leq \lambda \leq \mu$ sind die minimalen Anzahlen von Kanten, die ein einfacher Zykel durch je zwei der von P ausgehenden Kanten enthält. Jeder Automorphismus kann nur Knotenpunkte vom gleichen Typus ineinander überführen.

Baebler (Zürich).

Klassische theoretische Physik.

Görtler, H.: Bemerkung zur Grundlegung der Dimensionsanalysis. Z. Naturforsch. 3a, 668—669 (1948).

Verf. stellt fest, daß zu jeder „Messung“ außer einer Ordnungsbeziehung der Intensitäten eine solche der Intensitätsunterschiede gehört, und daß damit das Maßsystem soweit festliegt, daß Bridgman's „absolute Bedeutung der relativen Größe“ folgt, nämlich die folgende Eigenschaft eines physikalischen Maßsystems: „das Verhältnis der Maßzahlen zweier Intensitäten einer gemessenen Größe ist unabhängig von der Wahl der Einheit, mit der die Intensitäten gemessen werden“.

Riegels (Göttingen).

Elastizität. Plastizität. Akustik:

● Sommerfeld, Arnold: Vorlesungen über theoretische Physik. II. Mechanik der deformierbaren Medien. 2. neu bearb. Aufl. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1949. XII, 371 S. m. 74 Fig. brosch. 14,— DM.

L'A. expose dans cet ouvrage les principes fondamentaux de la mécanique des milieux déformables en poursuivant essentiellement le point de vue physique. — Un remarquable choix d'exercices avec une indication pour les résoudre et quatre notes complémentaires suivent les huit chapitres du livre. Partout on y trouve des remarques originales ou une présentation nouvelle de concepts très classiques. — Dans le Ch. I l'A. traite la Cinématique des milieux déformables en rappelant les fondements de l'Analyse vectorielle et tensorielle. Il introduit le concept de l'opérateur rot en le rattachant au théorème de Helmholtz sur la structure du mouvement instantané plus général d'un corps déformable et il en démontre le caractère de vecteur axial (tenseur antisymétrique). La présentation des théorèmes intégraux de Gauss, Green, Stokes est comme tout élégante. L'A. remarque que l'usage d'intégrations partielles en coordonnées cartésiennes orthogonales pour la démonstration du théorème de Gauss est superflue, dès qu'on a donné une définition intrinsèque des opérateurs div et rot. Le Ch. II contient la Statique et les conditions d'équilibre des milieux déformables. L'A. appelle Statique la théorie des forces agissant sur la matière, leur composition et leur équivalence indépendamment des mouvements qu'elles produisent. Dans le § 6 sur l'Hydrostatique l'A. démontre sur un exemple réalisable physiquement que l'absence de monodromie du potentiel est incompatible avec l'équilibre. Au § 7 on trouve une interprétation du rapport n des chaleurs spécifiques c_p et c_v qui résulte des principes de la Thermodynamique et de la Statistique générale. On a $n = 1 + 2/f$, f étant le nombre des degrés de liberté des molécules du gaz: pour une molécule biatomique on a $f = 5$, donc rigoureusement $n = 1,4$. Le § 10 contient les notions fondamentales sur les fluides visqueux incompressibles et leurs mouvements. L'A. y indique les difficultés nouvelles relatives aux gaz visqueux. — Le Ch. III a pour objet la Dynamique des fluides incompressibles et compressibles parfaits et visqueux, des corps élastiques, les éléments de la théorie de la capillarité et des mouvements turbulents. Signalons une application intéressante de l'équation de Bernoulli dans la théorie des mouvements liquides stationnaires (§ 11), la déduction des équations hydrodynamiques d'Euler du principe d'Hamilton avec la discussion complète de la signification du multiplicateur lagrangien (pression) et des conditions aux limites, les premiers éléments de la théorie de l'équation des ondes (appelée aussi „Schwingungsgleichung“ par les Auteurs alle-

mands) à laquelle satisfont la densité, la pression, le potentiel des vitesses dans les petits mouvements d'un fluide compressible en absence de forces massives, ce schéma étant important en Acoustique. — Le § 15 sur la comparaison entre un corps quasi élastique et le modèle de l'éther conçu par les physiciens du siècle XIX qui trouve son fondement sur l'analogie des équations de l'élasticité et les équations de Maxwell est riche de remarques de la plus haute importance. On y trouve l'indication de recherches récentes, par ex. celles de Schrödinger, Proc. Irish Acad. A 49, 43—58, 135—148, 225—235, 237—244, 275—287 (1943/44), qui ont pour objet une explication unitaire des phénomènes électrodynamiques et gravitationnels dont la première tentative remonte, peut-être, à Riemann qui a conçu son admirable synthèse dans son Mémoire posthume „Neue mathematische Prinzipien der Naturphilosophie“. Dans les §§ 16, 17, à propos de la Dynamique des fluides visqueux, l'A. introduit un nombre S par la formule $S = \rho/g v^2$ dont la signification des grandeurs est bien connue. Ce nombre de Sommerfeld joue un rôle important à côté du nombre de Reynolds. — Le Ch. IV a pour objet la théorie des tourbillons. L'A. l'expose d'après le mémoire classique de Helmholtz avec les perfectionnements de Lord Kelvin. Si l'on envisage les problèmes à deux dimensions on peut se demander comment un filet tourbillonnaire agit sur un autre filet. On peut étudier la question au point de vue cinématique et dynamique. Pour ce qui concerne ce second aspect l'A. fait bien remarquer que les lois élémentaires de la dynamique des tourbillons sont différentes de celles de Newton. — Le Ch. V a pour but la théorie des ondes. L'A. s'occupe ici des ondes à la surface des fluides incompressibles en envisageant successivement les ondes planes, celles à symétrie circulaire, etc. qui exigent des moyens mathématiques de difficulté croissante et introduit magistralement le concept de vitesse de groupe en en faisant ressortir la profonde signification physique soit en vue des conquêtes fondamentales de la Physique contemporaine (Mécanique ondulatoire de L. de Broglie, Schrödinger etc.) soit en rapport aux recherches classiques de Lord Rayleigh et Reynolds. — Dans le Ch. VI l'A. s'occupe des mouvements fluides plans au moyen de la méthode des fonctions analytiques d'une variable complexe et y développe les idées de Helmholtz et Kirchhoff pour le calcul de la résistance des fluides au moyen de la représentation conforme. Cette méthode est appliquée aussi au problème classique des jets liquides dans le § 31; les §§ 32, 33 donnent quelques indications sur la méthode des tourbillons de Kármán, sur le problème de la résistance en général et enfin sur les recherches de Prandtl et de son école. — Les différentes appréciations de la Thèse de Riemann dues à Helmholtz et à Weierstrass dont l'A. nous informe à travers la parole du physicien Wüllner sont encore aujourd'hui l'expression de deux formes mentales opposées. Les progrès véritables de la Physique et des Mathématiques se font surtout en poursuivant le point de vue de la Physique mathématique qui a été la vraie source du génie de Riemann et les illustres continuateurs jusqu'à Einstein. — Dans les compléments à l'Hydrodynamique du Ch. VII le lecteur trouve la théorie hydrodynamique des lubrifiants avec les contributions fondamentales de Sommerfeld. — L'A. étudie dans le § 37 les ondes de choc qui ont été traitées pour la première fois rigoureusement par Riemann. On sait combien profonde a été l'influence exercée par le mémoire célèbre de Riemann: les travaux de Christoffel, Hugoniot, Hadamard, Courant et Friedrichs, etc. constituent déjà un édifice important qui s'évalue sans cesse pour l'importance théorique et technique des problèmes envisagés. Les recherches récentes de Bechert in Ann. Physik 37, 89—123, 38, 1—25 (1940); ce Zbl. 23, 183, 415 ont jeté une lumière nouvelle sur le problème de Riemann: elles ont trouvé justement leur place dans l'ouvrage de Sommerfeld. Les problèmes sur la turbulence avec le modèle mathématique de Burgers ont été traités à la fin du Ch. VII. — Enfin le Ch. VIII contient des compléments à l'Elasticité et à la Plasticité. Dans ce chapitre on trouve une quantité énorme de remarques intéressantes adressées à plusieurs théories physiques dont la validité se prolonge dans la Physique quantique contemporaine. — Je suis convaincu que cet ouvrage très remarquable dont on a annoncé ou proposé la publication en langue anglaise et italienne exercera l'influence la plus heureuse sur l'orientation de la pensée et de l'enseignement de la Physique théorique.

G. Lampariello (Messine).

Goss, R. N.: Center of flexure of beams of triangular section. Iowa College, J. Sci. 23, 375—379 (1949).

Der Querschnitt eines Stabes sei von der x -, der y -Achse und der Geraden $y = mx + c$ begrenzt. Im Biegungsmittelpunkte mit den Koordinaten x_0 und y_0 greife eine Last W parallel zur Hypotenuse an. Infolge der Biegung ist

$$\tau_{zy} = \frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{2 + \nu}{1 + \nu} \frac{W_x}{J_y} \{x - \bar{x}\} \{y - \bar{y}\} - \frac{W_y}{2 \{1 + \nu\} J_x} \left\{ \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) (x - \bar{x})^2 + \frac{\nu}{2} (y - \bar{y})^2 \right\};$$

die Biegungsfunktion χ hat B. R. Seth, Proc. London math. Soc., II. S. 41, 325—331 (1936) berechnet; \bar{x} und \bar{y} sind die Koordinaten des Querschnittsmittelpunktes. In der Gleichgewichtsbedingung

$$x_0 \left\{ W_y + \frac{P_{xy}}{J_y} W_x \right\} - y_0 \left\{ W_x + \frac{P_{xy}}{J_x} W_y \right\} = \iint \{x \tau_{zy} - y \tau_{zx}\} dx dy$$

wird die Torsionssteifigkeit

$$D = G \int \int \left\{ x^2 + y^2 + x \frac{\partial \Phi}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\} dx dy \quad (\Phi \text{ Torsionsfunktion})$$

eingeführt und $W_y = m W_x$ gesetzt. Nach dem Verfahren von Rayleigh und Ritz ist in 1. Näherung $D = G c^4 / [20 m (m^2 + 1)]$. Der Biegungsmittelpunkt liegt auf der Geraden $y_0 = m x_0 + \frac{3}{5} c$. — Der Querschnitt sei von den Geraden $y = d$, $y = m_1 x$ und $y = m_2 x$ begrenzt; die Querlast habe beliebige Richtung; $\nu = 1/2$. In der Gleichgewichtsbedingung werden die Koeffizienten von W_x und W_y verglichen und daraus x_0 und y_0 berechnet. Für die Torsionssteifigkeit wird die Saint-Venant'sche Näherung $D = \frac{9}{16 \pi^2} G \frac{d^4 \{m_2 - m_1\}^3}{m_1 m_2 (m_1^2 - m_1 m_2 + m_2^2 + m_1^2 m_2^2)}$ benutzt. Anm. des Ref.: S. 379, 1. Zeile: $m_1 m_2 + 1$ muß durch $m_1 m_2 - 1$ ersetzt werden; 3. Zeile: beide 18 müssen durch 6 ersetzt werden. *Konrad Ludwig* (Hannover).

Chen, Pei-Ping: The equivalent loading method and the equivalent beam method. *Quart. appl. Math.* **7**, 183—200 (1949).

In der Balkentheorie pflegt man Lasten, die sich auf ein kurzes Stück verteilen, durch „Einzel“-Lasten zu ersetzen; den Spannungszustand im Rest des Balkens erhält man trotzdem mit genügender Genauigkeit. Das dadurch angeschnittene Ersatzproblem behandelt Verf. systematisch, indem er zeigt, wie solche Ersatzlasten aussehen müßten, wenn sie streng gleichwertig sein sollen, und führt in einem Beispiel vor, wie man im einzelnen Falle zu rechnen hat (das Hauptgewicht der Untersuchung liegt gleichwohl auf den mathematischen Deduktionen). Der zweite Teil der Arbeit behandelt ein verwandtes Problem: wie kann man ein unbelastetes (z. B. nach der ersten Methode von verteilten Lasten befreites) Stück des Balkens von veränderlichem Trägheitsmoment ersetzen durch ein oder mehrere Stücke von konstantem Trägheitsmoment? Das ist in systematischer Weise möglich (der Formelmechanismus wird übrigens am übersichtlichsten, wenn man sich der Matrizen-schreibweise bedient). Die Zahlenbeispiele, die der Verf. gibt, sind relativ einfach — die allgemeinen Formeln umfassen auch elastische Bettung und Längskräfte (sofern diese nicht Instabilität bewirken). *Marguerre* (Darmstadt).

Neal, B. G.: The lateral instability of yielded mild steel beams of rectangular cross-section. *Philos. Trans. R. Soc. London, A* **242**, 197—242 (1950).

Baker, J. F., M. R. Horne and J. W. Roderick: The behaviour of continuous stanchions. *Proc. R. Soc., London, A* **198**, 493—509 (1949).

Eine in x -Richtung prismatische Strebe unterliege zwei gegensinnigen (Fall a) oder gleichsinnigen (Fall b) Biegemomenten, die durch konstant belastete Hebelarme ausgeübt werden, die an ihren Enden ansitzen, und einer zusätzlichen axialen, allmählich wachsenden Kraft P (z. B. senkrechter Träger in Baugerüsten), so daß die Strebe eine einfache (a) oder doppelte (b) Krümmung erhält. In Experimenten an Rechteck- und Γ -Trägern wurde die Durchbiegung in der Mitte (a) oder an den Viertelpunkten (b) der Länge sowie die Drehung des Mittelquerschnittes (b) in Abhängigkeit von P über die Elastizitätsgrenze hinaus bis zur Erreichung der Last S des Nachgebens (collapse) ermittelt; entsprechende Diagramme, die qualitativ für beide Profilformen übereinstimmen, werden mitgeteilt. — Die theoretische Behandlung beschränkt sich auf die Strebe rechteckigen Querschnittes. Die verwendete Spannungsdehnungskurve läuft linear bis zur Erreichung der oberen Fließgrenze, anschließend fällt die Spannung auf die untere Fließgrenze und bleibt dann konstant. Unter der Voraussetzung, daß die Querschnitte bei der Biegung eben bleiben, und daß nur axiale Spannungen berücksichtigt zu werden brauchen, und unter der weiteren Hypothese H , daß mit wachsendem P in den plastischen Bereichen die Dehnungen wachsen, kann damit bei bekanntem Krümmungsradius R und bekannter Lage der neutralen Faser die Spannungsverteilung im Querschnitt an jeder Stelle x bestimmt werden. Aus der Spannungsverteilung ergeben sich Axialkraft P

und Biegemoment M . Umgekehrt ist dann $M = M(P, R)$, wobei diese Abhängigkeit stückweise analytisch ist mit Trennpunkten bei den (P, R) , wo sich die Anzahl der elastischen und plastischen Bereiche ändert. Für jedes feste P ergibt sich so wie üblich für die Ausbiegung eine Differentialgleichung 2. Ordnung, die außer im rein elastischen Bereich nur numerisch lösbar ist. Das Ergebnis ist in sehr guter Übereinstimmung mit den experimentellen Kurven. Die Ausbildung der plastischen Bereiche mit wachsendem P wird diskutiert. Es zeigt sich, daß für P dicht unterhalb von S bereits H nicht mehr erfüllt ist. Doch macht die damit fälschlich eingeführte Reversibilität der plastischen Verformung numerisch im Falle (a) nichts aus. Sie ist dagegen von wesentlichem Einfluß im Falle (b), wo bereits bei $P \approx S/2$ Umkehrung der Dehnungsrichtung in plastischen Bereichen stattfindet. Die Theorie wurde daher hier verbessert durch die Annahme, daß die rückläufige Dehnung dem Hookeschen Gesetz gehorcht. M hängt dann nicht nur von P und R , sondern noch von der Vorgeschichte ab, was stückweise Integration nach wachsendem P erforderlich macht. Die theoretischen Ergebnisse über die Drehung des Mittelquerschnittes sind dann wieder in sehr guter Übereinstimmung mit dem Experiment (während das vereinfachende H zu große Drehungen und ein zu kleines S liefert); die Lage der plastischen Bereiche und der Dehnungsumkehrbereiche sind angeben.

Hans Richter (Haltingen/Baden).

Miesse, C. C.: Determination of the buckling load for columns of variable stiffness. J. appl. Mech., New York 16, 406—410 (1949).

Das Verfahren der schrittweisen Näherungen mit oberen und unteren Schranken für den ersten Eigenwert einer selbstadjungierten definiten Eigenwertaufgabe wird an Beispielen der Knicklasten von Stäben veränderlichen Querschnitts erläutert.

Collatz (Hannover).

Okubo, H.: On the torsion of a prismatic cylinder with a star-shaped section. J. appl. Physics, Lancaster Pa. 20, 1155—1157 (1949).

Für die besondere Querschnittsgestalt, die eine geschlossene Lösung zuläßt, hat schon St. Venant das Torsionsproblem der geriffelten Säule behandelt. Verf. untersucht einen Fall, der insofern allgemeiner ist, als die Kerben zwar speziell als logarithmische Spiralen vorausgesetzt werden, wo das Verhältnis zwischen Breite und Tiefe der Kerbe aber noch offenbleibt. Die Rechnung (mit Hilfe eines Reihenansatzes) gibt die Spannungsverteilung an der Kerbeninnenseite und die Torsionssteifigkeit I_T . In einem Zahlenbeispiel ergibt sich $I_T = 0,512 I_{T\text{Kreis}}$, was durch ein Experiment gut bestätigt wird.

Marquerre (Darmstadt).

Woinowsky-Krieger, S.: Zur Statik und Kinetik der Trägerroste. Ingenieur-Arch. 17, 391—402 (1949).

Verf. behandelt den (sonst nur durch eine sehr mühsame, statisch unbestimmte, Rechnung erfaßbaren) Spannungszustand in einem aus (z. B.) 3 oder 4 Längs- und sehr vielen Querträgern bestehenden Trägerrost, unter den Voraussetzungen, daß 1. die Lasten auf den Hauptträgern angreifen, 2. die Torsionssteifigkeit der Einzelträger sehr klein ist, 3. die Querträger durch eine kontinuierliche drillungsschlaffe Platte ersetzt werden dürfen — in der Weise, daß er die Differentialgleichungen durch eine Entwicklung nach n Hauptschwingungsformen der Längsträger (die ein den Randbedingungen genügendes vollständiges Funktionensystem bilden) in ein Gleichungssystem für die Entwicklungskoeffizienten der Durchbiegungen Y der Längsträger und der Momente in den Querträgern überführt; nach deren Bestimmung ergeben sich die für die Bemessung wesentlichen Momente in den Längsträgern durch Differentiation. Das (relativ ungünstige) Beispiel der Einzellast in der Mitte eines der (drei) Hauptträger zeigt, daß man bei 3 Reihengliedern schon recht gute Werte und bei Abschätzung des Reihenrestes Ergebnisse erhält, die von den exakten um weniger als Prozente abweichen. Das Verfahren läßt sich auch auf mehr als 4 Haupt-

träger anwenden, indessen empfiehlt sich dann, wie Verf. zeigt, von den Rechen-
vorteilen des Differenzenformalismus Gebrauch zu machen. In den beiden letzten
Abschnitten werden die Eigenschwingungen und die durch eine wandernde Last
erregten Schwingungen für denselben Trägerrost bestimmt; für die höheren Eigen-
schwingungen ist die Ersetzung der Querträger durch die Platte nicht mehr zulässig,
indessen haben ja auch in erster Linie nur die niederen Schwingungen praktisches
Interesse.

Marguerre (Darmstadt).

Benscoter, S. U.: Analysis of a single stiffener on an infinite sheet. *J. appl. Mech.*, New York **16**, 242—246 (1949).

Die versteiften Blechkonstruktionen des Flugzeugbaus sind der Anlaß, daß
das Problem der „Lasteinleitung“ vielfach untersucht worden ist. So hat z. B.
Reißner die unendliche Halbscheibe mit einer Einzelsteife behandelt [*Proc. nat. Acad. Sci. USA* **26**, 300—305 (1940)]. Die vorliegende Arbeit behandelt in ähnlicher
Weise die Versteifung endlicher Länge, die an beiden Enden Längskräfte trägt
und an einem allseits unendlich ausgedehnten Blech, ohne gleiten zu können,
befestigt ist. Wie Reißner erhält Verf. eine Integralgleichung, die mathematisch
identisch ist mit der Prandtl'schen Gleichung für die tragende Linie (Flügel endlicher
Länge unter Luftlasten). Mit Hilfe des Muthopp'schen Verfahrens [*Luftfahrt-
Forschung* **15**, 153—169 (1938); *Zbl. f. Mech.* **7**, 231], das diese Gleichung näherungs-
weise durch ein System linearer Gleichungen ersetzt, werden der symmetrische
und der antimetrische Lastfall durchgerechnet und für ein numerisches Beispiel
zahlenmäßig ausgewertet.

Marguerre (Darmstadt).

Tarabasov, N. D.: Berechnung der Festigkeit von zusammengesetzten Ring-
teilen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **70**, 977—980 (1950) [Russisch].

Tarabasov, N. D.: Festigkeitsberechnungen zusammengepreßter Kupplungen.
Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **67**, 615—618 (1949) [Russisch].

Eine kreisförmige dünne Platte S , $r \leq r_0$, konstanter Dicke aus homogenem,
isotropem, elastischem Material sei zusammengesetzt aus einer Mittelscheibe $r \leq r_m$
und konzentrischen Ringen $r_{n-1} \geq r \geq r_n$ bei $r_0 > \dots > r_m$, wobei diese Teile
im spannungsfreien Zustand nicht ineinanderfügbar wären, so daß ein Spannungs-
zustand mit bekannten radialen Sprüngen δ_n des Verschiebungsvektors auf $r = r_n$
entsteht (durch Vorspannungen gehaltene Kupplung). S sei belastet durch eine
längs $r = r_0$ konstante Schubspannung τ_0 , mit der ein Drehmoment im Gleich-
gewicht steht, das auf der Mittelscheibe in nach r bekannter Verteilung angreift.
— Berechnung der Spannungsverteilung durch Benutzung analytischer Funktionen.
— Anwendung: Bestimmung der δ_n bei bekanntem τ_0 so, daß die Spannungen Festig-
keit von S garantieren.

Hans Richter (Haltingen/Baden).

Okubo, H.: Bending of a thin circular plate of an aeolotropic material under
uniform lateral load (supported edge). *J. appl. Physics*, Lancaster Pa. **20**, 1151—
1154 (1949).

Die Arbeit untersucht die gelenkiggelagerte orthotrope (orthogonal-anisotrope)
Kreisplatte unter gleichförmiger Last. Infolge der Anisotropie geht die Zirkular-
symmetrie verloren, der Schwierigkeitsgrad des Problems ist der der elliptischen
Platte. Die Einführung elliptischer Koordinaten und eine Reihenentwicklung bieten
sich als der klassische Lösungsweg an. Konvergenzschwierigkeiten lassen indessen
ein Näherungsverfahren angezeigt erscheinen, dessen Brauchbarkeit Verf. an dem
Beispiel einer Eichenholzplatte vorführt (mit Grenzübergang zur Isotropie).

Marguerre (Darmstadt).

Thorne, C. J.: Square plates fixed at points. *J. appl. Mech.*, New York **15**,
73—79 (1948).

Durch Überlagerung einer Partikularlösung mit biharmonischen Polynomen,
deren Koeffizienten so bestimmt werden, daß die Randbedingungen, außer an den

Ecken, an drei äquidistanten Punkten jeder Seite erfüllt sind, bestimmt der Verf. die interessierenden Größen (Durchbiegungen, Neigungen, Momente an Symmetriepunkten usw.) für die folgenden Last- und Lagerungsfälle: 1. Gleichförmige Last, Einspannung der Ränder, 2. Einzellast in der Mitte, Einspannung; für dieselben Lasten ferner: wenn 3. und 4. die Durchsenkung $\neq 0$, 5. und 6. die Neigung $\neq 0$ eines der Randpunkte vorgeschrieben ist. Das Verfahren erlaubt die Bestimmung dieser Größen mit einer die bisherigen Verfahren (deren Resultate zusammengestellt sind) übertreffenden Genauigkeit. Ein Tafelwerk, auf das der Verf. verweist (Bull. 34, Utah Eng. Exp. Station, Utah) ermöglicht die Anwendung in der Praxis.

Marguerre (Darmstadt).

Milosavljevitch, Miodrag: Sur la stabilité des plaques rectangulaires renforcées par des raidisseurs et sollicitées à la flexion et au cisaillement. Acad. Serbe, Bull. Acad. Sci. math. natur., A 1, 121—135 (1947).

Eine am Rande $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ und $y = b$ ohne Einspannung aufliegende Platte hat längs $y = h$ eine Versteifung mit der Steifigkeit EJ_a und längs $x = c_1$ und $x = c_2$ Versteifungen mit der Steifigkeit EJ_b . Die Platte hat die Querverschiebung $w = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$. Der Druck zwischen der Platte und der Versteifung längs $y = h$ wird mit q_a und die Versteifungsbreite mit $2s$ bezeichnet. Es gilt

$$q_a 2s = EJ_a \frac{d^4 w_{y=h}}{dx^4} = EJ_a \sum_m \sum_n A_{mn} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi h}{b}.$$

Nach $s \rightarrow 0$ ist die Flächenlast

$$q = 2\pi^4 E \sum_m \sum_n \left\{ \sum_j \frac{J_a}{a^4 b} A_{mj} m^4 \sin \frac{n\pi h}{b} \sin \frac{j\pi h}{b} + \frac{J_b}{ab^4} A_{jn} n^4 \cdot \left(\sin \frac{m\pi c_1}{a} \sin \frac{j\pi c_1}{a} + \sin \frac{m\pi c_2}{a} \sin \frac{j\pi c_2}{a} \right) \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Die Differentialgleichung $DA\Delta w = -q - p \left\{ 1 - \varphi \frac{y}{b} \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2T \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ wird mit $\sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{r\pi y}{b}$ multipliziert und über die Platte integriert:

$$\begin{aligned} A_{kr} \left\{ k^2 + \frac{a^2}{b^2} r^2 \right\}^2 + 2 \frac{EJ_b}{D} \frac{a^3}{b^4} r^4 \sin \frac{k\pi c_1}{a} \sum_j A_{jr} \sin \frac{j\pi c_1}{a} \\ + 2 \frac{EJ_b}{D} \frac{a^3}{b^4} r^4 \sin \frac{k\pi c_2}{a} \sum_j A_{jr} \sin \frac{j\pi c_2}{a} + 2 \frac{EJ_a}{Db} k^4 \sin \frac{r\pi h}{b} \sum_j A_{kj} \sin \frac{j\pi h}{b} \\ = \frac{p}{D} \left\{ \frac{k a}{\pi} \right\}^2 \left\{ A_{kr} \left(1 - \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{8\varphi}{\pi^2} \sum_n A_{kn} \frac{n r}{(n^2 - r^2)^2} \right\} \\ + \frac{32 a^3}{\pi^4 b} \frac{T}{D} \sum_m \sum_n A_{mn} \frac{k m r n}{\{k^2 - m^2\} \{r^2 - n^2\}}. \end{aligned}$$

Anm. des Ref.: Auf S. 129 in der 2. Gl. muß der Faktor von A_{15} zu $-\frac{\gamma}{\sqrt{2}} - \frac{80}{21^2 \pi^2} \alpha^2 \varphi k_1$, in der 4. Gl. der Faktor von A_{23} zu $8\sqrt{2}\gamma - \frac{64 \cdot 3}{25} \alpha^2 \varphi k_1$ und in der 6. Gl. der Faktor von A_{32} zu $\frac{81}{\sqrt{2}}\gamma - \frac{16}{\pi^2} \alpha^2 \varphi k_1$ ergänzt werden. Auf S. 130 in Zeile und Spalte 22 fehlt bei k_1 der Faktor 4.

Konrad Ludwig (Hannover).

Green, A. E.: On Reissner's theory of bending of elastic plates. Quart. appl. Math. 7, 223—228 (1949).

Unter Benutzung der von Stevenson [Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics, VII. S. 33, 639 (1942)] eingeführten komplexen Schreibweise für die Grund-

gleichungen der Elastizitätstheorie zeigt der Verf., daß die Reißnerschen Gleichungen für die Schub-elastische Platte auch ohne Beziehung auf den Begriff der Formänderungsenergie gewonnen werden können, wenn man mit Hilfe gewisser, durch die Form der Grundgleichungen nahegelegten „Gewichte“, Typ: $[1 - (z/h)^2]$, geeignete Mittelwerte der drei Verschiebungen definiert und diese zusammen mit dem Hookeschen Gesetz in die Definitionsgleichungen der Momente und Querkräfte einführt. Das Verfahren wird auch auf die anisotrope Platte erweitert; außerdem wird in derselben komplexen Schreibweise ein Lösungsansatz gegeben.

Marguerre (Darmstadt).

Schunck, T. E.: Der zylindrische Schalenstreifen oberhalb der Beulgrenze. Ingenieur-Arch. 16, 403—421 (1948).

In Anlehnung an Untersuchungen von Kromm-Marguerre [Luftf. Forsch. 14, 627—639 (1937); Zbl. f. Mech. 7, 160] über die Tragfähigkeit ebener Plattenstreifen oberhalb der Beulgrenze (Energimethode: Bestimmung geeigneter Parameter im Ansatz aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen, da eine exakte Behandlung der nicht-linearen Differentialgleichungen unmöglich ist), untersucht die Arbeit das Verhalten eines gekrümmten Plattenstreifens oberhalb der Beulgrenze. Naturgemäß ist die Diskussion wesentlich mühsamer als für den ebenen (das zeigt sich schon bei der Bestimmung der Beullasten); zahlenmäßig wird sie für ein ganz bestimmtes Krümmungsmaß durchgeführt in den beiden Grenzfällen fehlender und starrer Querstützen zwischen den Längsgurten. Diagramme geben die wichtigen Größen: die effektiven Moduli (Schub und Druck) sowie die Größe der Ausbeulungen in Abhängigkeit vom Überschreitungsgrad p/p_k . Interessant wäre ein Vergleich der Ergebnisse mit den z. T. prinzipiell abweichenden von v. Kármán [J. aeronaut. Sci. 7, 43—50 (1939); 276—289 (1940); 303 (1941)] die dem Verf. erst nachträglich bekannt geworden sind.

Marguerre (Darmstadt).

Schunck, T. E.: Die quadratische Platte bei Schubbelastung oberhalb der Beulgrenze. Ingenieur-Arch. 17, 119—128 (1949).

Ein Problem ähnlich dem vorstehend referierten: einfacher insofern, als die Zahl der Abmessungsparameter kleiner ist (verschwindende Krümmung, dehn- und biegestarrer Randträger), schwieriger insofern, als auf zwei Randpaaren Bedingungen zu erfüllen sind. Für die Bewältigung des Problems erweisen sich hier Differenzengleichungen als der gangbarste Weg; die nicht-linearen finiten Gleichungen lassen sich dann durch ein Iterationsverfahren lösen, das recht gut konvergiert. Für drei Überschreitungsgrade ist so der Verlauf der Höhenlinien auf der ausgebeulten Platte berechnet, ferner die Abhängigkeit zwischen Gesamtschubkraft und Gesamtgleitwinkel, d. h. der effektive Schubmodul. Bei geeigneter Umrechnung liegt dieser Wert dem für den unendlich langen Streifen beruhigend nahe.

Marguerre.

Langhaar, H. L.: A strain-energy expression for thin elastic shells. J. appl. Mech., New York 16, 183—189 (1949).

Die in dem Loveschen Buche entwickelte Schalentheorie ist, wie schon die Flüggesche Arbeit über die Zylinderschale [Ingenieur-Arch. 3, 463—500 (1932); Zbl. f. Mech. 1, 14] gezeigt hat, keineswegs in allen Teilen in sich konsequent. So enthält auch der Ausdruck für die Formänderungsenergie im Biegeanteil Terme, die, wie man durch Grenzübergänge feststellen kann, nicht vorkommen dürften. Unter Beschränkung auf Schalen, deren Wandstärke klein ist gegen die Hauptkrümmungsradien, gibt der Verf. den Dehn- und Biegeanteil des Energieausdrucks vollständig an, sogar unter Mitnahme nicht-linearer Terme in der Normalverschiebung w . Die Herleitung bedient sich des Riccikalküls (Kovariante Ableitungen, Christoffel-Symbole usw.), was bei diesem komplizierten Problem wohl der einzig sichere Weg ist. Für Platte, Kreiszylinderschale, Kugel und Rotationsellipsoid werden die allgemeinen Formeln dann spezialisiert.

Marguerre (Darmstadt).

Pailloux, Henri: Sur la détermination des tensions dans une membrane dépourvu de raideur. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 54—46 (1949).

Darstellung der bekannten Membrantheorie der Schalen. *Neuber* (Dresden).

Mindlin, R. D.: Compliance of elastic bodies in contact. J. appl. Mech., New York 16, 259—268 (1949).

Die Hertzsche Lösung für den Spannungszustand zweier sich berührender elastischer Körper wird vom Verf. insofern ergänzt, als außer der senkrecht zur Berührungsfläche wirkenden Kraft noch eine tangentielle Kraft und ein um die Normale zur Berührungsfläche drehendes Torsionsmoment in Betracht gezogen wird. Mit Hilfe des Boussinesq'schen Ansatzes für den elastischen Halbraum führt Verf. die Ergänzungslösungen auf Integraldarstellungen zurück, wobei Besselsche Funktionen auftreten. Im Falle der kreisförmigen Berührungsfläche stellt sich die gleiche Spannungsverteilung ein, wie sie für die Umdrehungsaußenkerbe (Hyperboloid) von Ref. (Kerbspannungslehre, Berlin 1937) ermittelt worden ist. Die relative Verschiebung und Drehung beider Körper gegeneinander läßt sich mittels bekannter elliptischer Integrale darstellen. *H. Neuber* (Dresden).

Pippard, A. J. S. and J. E. Duncan: The stresses in an artillery wheel. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 2, 398—411 (1949).

Uzik, G. W.: Über eine bemerkenswerte Besonderheit des allseitigen Zusammenpressens. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 68, 293—295 (1949) [Russisch].

Prager, William: Recent developments in the mathematical theory of plasticity. J. appl. Physics, Lancaster Pa. 20, 235—241 (1949).

Wiedergabe eines Vortrages, den der Verf. 1948 auf dem 7. Internationalen Kongreß für angewandte Mechanik in London gehalten hat. Der Vortrag beschäftigte sich nicht mit neuen Lösungen von Problemen der Plastizitätstheorie, er setzt sich vielmehr das Ziel, zusammenfassend und ergänzend die Begriffe aufzustellen, die für die weitere Ausgestaltung der Theorie wesentlich sind. Den Ausgangspunkt bildet die Unterscheidung zwischen vollkommen-plastischen (perfectly plastic) Stoffen und Stoffen mit Spannungs-Verfestigung (work-hardening materials), je nachdem sie bei gleichbleibender Spannung Änderungen der bleibenden Dehnungen zulassen oder nicht. Die Grenze des Fließzustandes eines Stoffes wird durch eine Fließ-Fläche (yield surface) in einem R_6 dargestellt, und ein Zustand wird als plastisch oder elastisch bezeichnet, je nachdem der Endpunkt des Spannungsvektors in diesem R_6 auf dieser Fläche oder in ihrem Innern liegt. Eine neutrale Spannungsänderung kann als Grenzfall entweder einer Belastung oder Entlastung angesehen werden, eine Aussage, die als Kontinuitätsbedingung bezeichnet wird. Für die Lösungen des zugehörigen Spannungsproblems wird Eindeutigkeit gefordert. Weiterhin werden für die plastischen Formänderungen die Bedingungen der Nichtumkehrbarkeit und des Zusammenhanges (consistency) formuliert. — Die weiteren Ausführungen betreffen das Problem der plastischen Stabilität und die Berechnung statisch-unbestimmter Systeme mit Berücksichtigung der plastischen Formänderungen. Ausführliche Literaturangaben. *Th. Pöschl* (Karlsruhe).

Hill, Rodney: General features of plastic-elastic problems as exemplified by some particular solutions. J. appl. Mech., New York 16, 295—300 (1949).

Die von A. Reuss [Z. angew. Math. Mech. 10, 266 (1930)] im Anschluß an grundlegende Überlegungen von De Saint Venant, Lévy, von Mises und Prandtl aufgestellten Differentialgleichungen für den inneren Mechanismus des plastisch-elastischen Körpers werden vom Verf. in speziellen Fällen integriert: 1. Der prismatische zugbeanspruchte Stab, dessen Querschnitt ein so schmales Rechteck darstellt, daß der Spannungszustand als eben angesehen werden kann; 2. die Hohlkugel unter Innendruck; 3. der lange dickwandige Hohlzylinder unter Innendruck. Weitere Betrachtungen beziehen sich auf das Torsionsproblem prismatischer Stäbe, wobei die elastischen Formänderungsanteile im plastischen Bereich ganz in Wegfall

kommen, so daß die Theorie von Prandtl-Reuss mit jener von Hencky-Nadai übereinstimmt. Verf. schlägt vor, einen ähnlichen Sachverhalt allgemein als Grundlage einer Näherungslösung für kompliziertere, der Rechnung schwer zugängliche Fälle zu verwenden, d. h. die elastischen Formänderungsanteile gegenüber den rein plastischen im plastischen Bereich zu vernachlässigen. *H. Neuber* (Dresden).

Sauter, Fritz: Über die Reflexion elastischer Wellen an der Grenzfläche eines festen Mediums. *Z. angew. Math. Mech.* **30**, 94—95 (1950).

Waller, Mary D.: Vibrations of free rectangular plates. *Proc. phys. Soc., London*, **B 62**, 277—285 (1949).

Experimentelle Arbeit über die Klangfiguren auf der Rechteckplatte. — Wegen des großen damit verbundenen Rechenaufwandes ist die (nach dem Ritzschen Verfahren grundsätzlich durchführbare) theoretische Bestimmung der zahlreichen auf der Rechteckplatte möglichen Schwingungsformen bisher nicht vollständig geleistet. Die Verfasserin kombiniert ihre sehr sorgfältigen Experimente mit Symmetriebetrachtungen, die ein ausreichendes Ordnungsprinzip abgeben, um die beobachteten Erscheinungen (2 Seiten Photos von Klangfiguren auf Rechteckplatten verschiedenen Seitenverhältnisses) wenigstens qualitativ alle zu deuten. Interessant ist, daß die Beobachtungen Chladnis aus dem Jahre 1787 sehr gut bestätigt (und natürlich ergänzt) werden. — Rechnungen von Pavlik [*Ann. Physik* **27**, 28 (1936); *Zbl. f. Mech.* **5**, 213, 415; **6**, 75, 270] werden durch die neuen Beobachtungen besser bestätigt als durch seine eigenen. *Marquerre* (Darmstadt).

Gammel, R.: Kritische Drehzahlen anisotrop gelagerter Läufer. *Ingenieur-Arch.* **17**, 363—366 (1949).

Bei schnellaufenden Wellen, Läufern oder Getriebeteilen, die direkten Motorantrieb haben, macht sich bei Ermittlung der kritischen Drehzahl des Systems der Einfluß der Lagernachgiebigkeit vielfach sehr stark bemerkbar. Verf. zeigt, wie bei richtungsabhängiger Lagerfederung („anisotrope Lagerung“) und Berücksichtigung der Motormasse die ursprüngliche kritische Drehzahl im allgemeinen eine Aufspaltung in vier kritische Drehzahlen erfährt, da die charakteristische Differentialgleichung sich von entsprechend höherer Ordnung herausstellt. *H. Neuber*.

Hydrodynamik:

Matthieu, P.: Die hydrodynamische Bedeutung der automorphen Funktionen (ebene Strömungen um Kreisbogenpolygone). *Comment. math. Helvetici* **23**, 80—122 (1949).

Die ebene Strömung um ein Profil kann als bekannt angesehen werden, wenn die konforme Abbildung des Profils auf einen Kreis oder eine Halbebene bekannt ist. Nun läßt sich ein Kreisbogenpolygon der z -Ebene durch eine automorphe Funktion $\zeta = A(z)$ auf die obere ζ -Halbebene abbilden, und die Umkehrfunktion $z = \omega(\zeta)$ ist darstellbar als Quotient zweier spezieller Lösungen einer Differentialgleichung zweiter Ordnung der Fuchsschen Klasse. Da der Quotient zweier beliebiger linear unabhängiger Lösungen durch eine leicht zu bestimmende lineare Substitution aus ω hervorgeht, ist die Abbildungsaufgabe gelöst, wenn 1. eine zum Polygon gehörige Differentialgleichung (die sich durch geeignete Normierung ihrer Parameter eindeutig festlegen läßt) und 2. der Quotient $\omega(\zeta)$ zweier linear unabhängiger Lösungen dieser Differentialgleichung bekannt sind. Zur Erledigung des zweiten Teils führt Verf. die Differentialgleichung für ω in eine Riccatische Gleichung für $d \log \omega / d \zeta$ über und schlägt vor, diese entweder nach dem Runge-Kutta- oder nach einem Potenzreihen-Verfahren zu lösen. Für beide Verfahren werden spezielle Anweisungen gegeben. Die erste Teilaufgabe, nämlich zu gegebenem Polygon die Parameter der zugehörigen Differentialgleichung anzugeben, läßt sich allgemein nicht lösen. Verf. schlägt daher vor, von einer passend gewählten Differentialgleichung

auszugehen, zu ihr nach 2. die Abbildungsfunktion und damit das zugehörige Kreisbogenpolygon zu bestimmen und dann die Parameter so zu variieren, daß das Resultat der Abbildung möglichst gut mit dem vorgelegten Polygon übereinstimmt. Ausführlich diskutiert wird der Fall des Kreisbogendreiecks, für das die Abbildung mittels hypergeometrischer Reihen bewerkstelligt werden kann. Zum Schluß einige Zahlenbeispiele.

Weissinger (Hamburg).

Ray, M.: Development of liquid motion due to an impulse. Bull. Calcutta math. Soc. 41, 179—182 (1949).

Zur Zeit $t = 0$ werde einer sich allseitig ins Unendliche erstreckenden, zähen, inkompressiblen, in Ruhe befindlichen Flüssigkeit ein Impuls derart erteilt, daß eine ebene Bewegung entsteht. Nach Anwendung ähnlicher Vernachlässigungen in den Bewegungsgleichungen, wie sie der Grenzschichttheorie zugrunde liegen, und unter der Annahme konstanten Druckes hat man $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ nebst

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$. Die Bewegung wird für kleine t untersucht; eine erste Näherung u

wird aus $\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, eine zweite $u + u^1$ aus $\nu \frac{\partial^2 u^1}{\partial y^2} - \frac{\partial u^1}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$ erhalten;

Bedingungen sind: $u \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$ (außer auf $y = 0$, wo die Impulstörung stattfindet) und $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ auf $y = 0$, ferner $u = 0$ im Unendlichen, entsprechend für

$u + u^1$. Es folgen hierzu einige Beispiele. Weitere Näherungen und Konvergenzbetrachtungen werden nicht gebracht.

Maruhn (Dresden).

Dean, W. R. and P. E. Montagnon: On the steady motion of viscous liquid in a corner. Proc. Cambridge philos. Soc. 45, 389—394 (1949).

Verff. betrachten die stationäre Bewegung einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit in der Nähe einer Ecke ($\theta = 0$, $\theta = \alpha$; r , θ ebene Polarkoordinaten), die der Differentialgleichung $\Delta \Delta \psi = 0$ mit den Randbedingungen $\psi = d\psi/d\theta = 0$ für $\theta = 0, \alpha$ genügt. Für die Stromfunktion wird wie bei Raleigh der Ansatz $\psi = r^m f(\theta)$ eingeführt. Während dieser, das Problem nur kurz erwähnend, der Meinung ist, daß m nur diskrete Werte annehmen kann, nämlich praktisch nur die Werte $\alpha = \pi$ und $\alpha = 2\pi$ (entsprechend $m = 2$ bzw. $m = 3/2$), geben die Verff. numerische Lösungen im Bereich $\pi/2 \leq \alpha \leq 2\pi$ und betrachten außerdem den Fall $\alpha \rightarrow 0$. Die Diskussion zeigt dabei, daß reelle m nur für $\alpha \geq 146,3$ bestehen, während für kleinere α der Realteil eines komplexen m maßgebend ist.

Riegels (Göttingen).

Kármán, Théodore de et Jacques Valensi: Application de la théorie de la couche limite au problème des oscillations d'un fluide visqueux et pesant dans un tube en U. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 105—106 (1948).

Eine Flüssigkeit geringer Zähigkeit schwinde in einem U-Rohr. In der Rohrachse sei die Geschwindigkeit

$$v = v_0 e^{-\lambda t} \cos \omega t \quad \left[T = \frac{2\pi}{\omega}; \lambda T = \text{logar. Dekrement} \right].$$

Ist die mit dem Rohrradius und der Schwingungsfrequenz gebildete Re-Zahl genügend groß, so gilt in der Nähe der Wand, wo die Geschwindigkeit näherungsweise wie an einer ebenen Platte schwingt, die Grenzschichtgleichung $\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ mit den Randbedingungen $v = v_0 \cos \omega t$ für $y = 0$ und $v = 0$ für $y \rightarrow \infty$. Aus ihrer Lösung folgt die Schubspannung $\tau = -\mu \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y=0}$ und durch Integration die

Arbeit der Reibungskräfte in der Zeit T : $2\pi k l \int_0^T \tau \cdot v_0 \cos \omega t dt$ (l Länge der schwingenden Säule). Diese Arbeit muß der Änderung der kinetischen Energie ΔE während einer Periode T gleich sein, woraus die Beziehung $\frac{\lambda}{\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} (R^2 \omega / \nu)^{-\frac{1}{2}}$ folgt.

Dies steht in guter Übereinstimmung mit dem experimentell gefundenen Gesetz, bei welchem statt $1/\sqrt{2}$ der Wert 0,82 gefunden wurde [C. r. Acad. Sci., Paris **224**, 893 (1947)].

Riegels (Göttingen).

Ulrich, A.: Die ebene laminare Reibungsschicht an einem Zylinder. Arch. Math., Karlsruhe **2**, 33—41 (1949/50).

Die universellen Beiwertfunktionen für die Blasius-Howarth'sche Reihenentwicklung der Stromfunktion liegen für die Indizes 1, 3, 5 bereits tabelliert vor. Verf. gibt die Tabellen für die Funktionen mit den Indizes 7 und 9. *Weissinger*.

Weizsäcker, C. F. v.: Das Spektrum der Turbulenz bei großen Reynoldsschen Zahlen. Z. Physik **124**, 614—627 (1948).

Darlegung einer Theorie der isotropen Turbulenz durch Verschärfung der mathematisch-statistischen Grundlagen. Ein von Turbulenz erfülltes „Grundvolumen“ von kubischer Form mit der Kantenlänge L_0 wird durch sukzessive Intervallschachtelung in Teilvolumina der Kantenlänge L_n eingeteilt, die Mittelwerte der Geschwindigkeiten über die Teilvolumina betrachtet und daraus auf die für das Grundvolumen geschlossen. Die Bedingung einer stationären Energie-dissipation führt dann zu den Gesetzen, daß der Mittelwert des Betrages der Relativgeschwindigkeit eines Punktes gegen seine um L_n entfernten Nachbarpunkte proportional zu $L_n^{1/3}$ und der turbulente Austausch über L_n proportional zu $L_n^{4/3}$ ist — was im Einklang mit der Erfahrung steht. Als Spektralgesetz der Fourieranalyse bedeutet dies, daß die Energie $F(k) dk$, die zwischen den Wellenzahlen k und $k + dk$ liegt, proportional zu $k^{-5/3}$ ist. Die Gültigkeitsgrenzen dieser Ergebnisse werden abgeschätzt.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Heisenberg, W.: Zur statistischen Theorie der Turbulenz. Z. Physik **124**, 628—657 (1948).

Im Anschluß an die vorsteh. besprochene Arbeit wird die statistische Theorie der Turbulenz in weiterer Verschärfung mit Hilfe der üblichen Methode der Fourierzerlegung behandelt. Dabei wird das Spektrum bis zu den kleinsten Wellenlängen, d. h. bis in den laminaren Bereich hinein verfolgt. Zum Schluß wird die für die Energiedissipation charakteristische Konstante aus den Bewegungsgleichungen der Hydrodynamik bei vernachlässigten Reibungsgliedern abgeleitet.

Th. Pöschl.

Bass, Jean: Sur les bases mathématiques de la théorie de la turbulence d'Heisenberg. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 228—231 (1949).

Statt der Heisenbergschen Fourierentwicklung führt der Verf. stochastische Fourier-Stieltjes-Integrale ein, um größere mathematische Strenge zu erzielen. Es wird erwähnt, daß die von Heisenberg näherungsweise angegebene Formel für das Spektrum bei großen Re-Zahlen in der exakten Form

$$F(k) \sim k^{-5/3} (1 + \text{const } (k/k_0)^4)^{-4/3}$$

geschrieben werden kann. Die Konstante setzt der Verf. allerdings gleich 1, während sie die kinematische Zähigkeit enthalten muß, vgl. z. B. Chandrasekhar (nachsteh. Referat) und J. Rotta, Ingenieur-Archiv **18**, 60 (1950).

Riegels (Göttingen).

Chandrasekhar, S.: The theory of statistical and isotropic turbulence. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. **75**, 896—897 (1949).

Heisenberg gibt in seinen neueren Arbeiten für das Spektrum der isotropen Turbulenz eine Interpolationsformel für große Re-Zahlen. Ist $\varrho F(k) dk$ der Energieverlust zwischen den Wellenzahlen k und $k + dk$, so erhält der Verf. eine explizite Darstellung von $F(k)$, die für große Re-Zahlen in eine der Heisenbergschen ähnliche Formel, nämlich

$$F(k) = F(k_0) \left(\frac{k}{k_0} \right)^{-5/3} [1 + \text{const. } (k/k_0)^4]^{-4/3},$$

übergeht, wobei die Konstante die kinematische Zähigkeit ν enthält. Es ändern sich dadurch einige Zahlenergebnisse, ohne daß allerdings — wie der Verf. auch

bemerkt — der physikalische Gehalt der Theorie beeinträchtigt wird. Vgl. auch Chandrasekhar, Proc. R. Soc., London, A 20, 20—33 (1949) und J. Rotta, Ingenieur-Archiv 18, 60 (1950). *Riegels* (Göttingen).

Agostini, Léon: La fonction spectrale de la turbulence isotrope. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 736—738 (1949).

Bemerkungen über den Zusammenhang des Heisenbergschen Spektrums mit den Korrelationsfunktionen bei isotroper Turbulenz. *Riegels* (Göttingen).

Agostini, Léon: Sur quelques propriétés de la fonction de corrélation totale. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 810—811 (1949).

Kampé de Fériet, Joseph: Le tenseur spectral de la turbulence homogène non isotrope dans un fluide incompressible. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 760—761 (1948).

Verf. führt in die statistische Turbulenztheorie den „Spektraltensor“ $\varphi_{jk}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ein, dessen Komponenten die Fourier-Transformierten der Komponenten des Kármánschen Korrelationstensors R_{jk} sind:

$$R_{jk}(h_1, h_2, h_3) = \overline{u_j(x'_1, x'_2, x'_3) \cdot u_k^*(x_1, x_2, x_3)} = \int_{\Lambda} e^{i\lambda h} \varphi_{jk}(\lambda) d\lambda$$

(z^* konjugiert komplex zu z , $\lambda h = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \lambda_3 h_3$, $d\lambda = d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3$; Λ der Raum der Frequenzen $-\infty < \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < +\infty$). Der Spektraltensor ist nur der einzigen Bedingung $\sum_{k,j} X_j X_k^* \varphi_{jk}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \geq 0$ für beliebige X_i unterworfen; hieraus folgt

$\varphi_{jk} = \varphi_{kj}^*$, $\varphi_{jj} \geq 0$. Für inkompressible Flüssigkeiten und homogene, nicht notwendig isotrope Turbulenz läßt sich eine bequeme Formel für die allgemeine Gestalt des Spektraltensors angeben, wie denn überhaupt bei Verwendung dieses Tensors sich die Rechnungen so vereinfachen, daß kein Grund mehr besteht, die bisher erforderliche Einschränkung der Isotropie beizubehalten. (Ohne Beweise.)

Maruhn (Dresden).

Kovaszny, Leslie S. G.: The spectrum of locally isotropic turbulence. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 73, 1115—1116 (1948).

In diesem „Brief an den Herausgeber“ gibt der Verf. einen Auszug aus seiner früheren Arbeit J. aeronaut. Soc., New York 15, 745 (1948), in welcher aus Dimensionsgründen für die kinetische Energie pro Zeit und Masseneinheit der Ansatz $S(n) = k_1 F^{3/2} n^{5/2}$ [wobei n die Wellenzahl, $F(n)$ das Spektrum und k_1 eine dimensionslose Konstante ist] vorgeschlagen wird [im Gegensatz zu der üblichen Anschauung, wonach alle Wellenzahlen beteiligt sind und somit $S(n)$ durch einen Integralausdruck zu definieren ist]. Dieser Ansatz führt zwar auch auf das $n^{-5/3}$ -Gesetz für den Bereich, in dem die Zähigkeit keine Rolle spielt, führt aber zusammen mit einer Gleichung für die Dissipation im stationären Zustand auf eine Funktion für das Spektrum, die für $n = n_0$ zu Null wird.

Riegels (Göttingen).

Betchov, R.: L'analyse spectrale de la turbulence. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 51, 1063—1072 (1948).

Theorie und Beschreibung eines Apparats zur spektralen Zerlegung der Turbulenz einer aerodynamischen Strömung und ähnlicher Vorgänge. Die Schwankung $v(t)$ der Geschwindigkeit V eines Luftstroms wird mit Hilfe eines Hitzdraht-Anemometers in die einer elektrischen Spannung transformiert, die ihr proportional ist, wenn man dafür sorgt, daß die thermische Trägheit des Hitzdrahts kompensiert wird, und wenn man einige andere Fehler des Hitzdrahtes vernachlässigt. Die Funktion $v(t)$ wird längs eines endlichen Intervalls $(-T, T)$ als stetig und außerhalb

als Null vorausgesetzt, so daß die Integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} v dt$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} v^2 dt$ existieren. In der

Apparatur wird ein Thermoelement mit Galvanometer verwendet. *Th. Pöschl*.

Burgers, J. M.: Spectral analysis of an irregular function. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 51, 1073—1076 (1948).

In der vorsteh. besprochenen Note wird die Funktion $v(t)$ nur in einem endlichen

Intervall $(-T, T)$ von Null verschieden vorausgesetzt, jedoch für das unendliche Intervall das Fouriersche Integraltheorem verwendet. Diese Einschränkung erweist sich für Vorgänge der Natur (z. B. für die Luftdruckschwankungen) als etwas Künstliches. Verf. zeigt, daß es möglich ist, das Spektrum im allgemeinen Fall, ähnlich wie es G. J. Taylor getan hat [Proc. R. Soc., London, A 164, 476—490 (1938)] durch Aufstellung einer Beziehung zwischen dem Spektrum und dem „Korrelationskoeffizienten“ der Funktion $v(t)$ zu definieren, aber das Fouriersche Integraltheorem zu vermeiden. Er fragt, was geschieht, wenn ein elektrisches Signal $w(t)$ durch einen Filterstrom (filtering circuit) hindurchgeht; die Beziehung zwischen beiden wird in Form einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten angesetzt.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

Squire, H. B.: Reconsideration of the theory of free turbulence. Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics, London, VII. S. 39, 1—20 (1948).

Ausgangspunkt der erneuten Sichtung bisher vorhandener Ansätze zur theoretischen Erfassung der wichtigsten Probleme der freien Turbulenz — ebene und räumliche Nachlaufströmungen und Strahlausbreitung — ist die Feststellung, daß bei den bisherigen Darstellungen nicht scharf unterschieden wird zwischen solchen Ergebnissen, die allein schon aus dimensionsanalytischen Erwägungen gefolgert werden können und solchen, die erst aus speziellen physikalischen Hypothesen entspringen. Dadurch sei ein Vergleich der Leistungsfähigkeit der einzelnen Theorien erschwert. Verf. stellt zunächst konsequent die Ergebnisse aus reinen dimensionsanalytischen Erwägungen für die wichtigsten Probleme der freien Turbulenz fest und sichtet anschließend vom Standpunkt dieser Ergebnisse die bisherigen theoretischen Ansätze, und zwar der Reihenfolge nach zunächst einen neueren Ansatz (Prandtl und Görtler 1942), sodann die bekannten älteren Theorien von Prandtl, Taylor und v. Kármán. Theoretische Untersuchungen von Reichardt werden nur erwähnt. In einem Anhang wird u. a. gezeigt, daß das logarithmische Geschwindigkeitsgesetz der wandnahen turbulenten Strömung auf dimensionsanalytischem Wege gefolgert werden kann; ferner werden experimentelle Ergebnisse von Fage und Falkner (1932) über die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung im Nachlauf hinter einem geheizten Zylinder zum kritischen Vergleich der bestehenden Theorien herangezogen.

H. Görtler (Freiburg i. Br.).

Oswatitsch, K.: Die Geschwindigkeitsverteilung bei lokalen Überschallgebieten an flachen Profilen. Z. angew. Math. Mech. 30, 17—24 (1950).

Die Arbeit, die in ausführlicherer Fassung und durch experimentelle Nachprüfungen ergänzt in den Physica Acta Austriaca erscheinen soll, gibt die knappe Darstellung eines durch physikalische Erwägungen plausibel gemachten Näherungsgedankens zur Berechnung von Gasströmungen an hinreichend flachen, zur Anströmungsrichtung symmetrischen Profilen mit lokalen Überschallgeschwindigkeiten. Sie greift damit unter genügend einschneidenden Vereinfachungen das schwierige gemischt-elliptisch-hyperbolische Umströmungsproblem an. Vom mathematischen Standpunkt handelt es sich zunächst um (physikalisch einleuchtende und wenn auch mathematisch nicht unterbaute, so doch weitgehend kontrollierbare) Vereinfachungen, welche die gasdynamische Grundgleichung auf eine einfachere (Gleichung der Form $U_x + V_y = U U_x$ reduzieren, zu der die Gleichung $U_y - V_x = 0$ als Ausdruck der Drehungsfreiheit tritt. $U > 0$ bedeutet Überschallgeschwindigkeit, $U < 0$ Unterschallgeschwindigkeit relativ zur Anströmungsgeschwindigkeit, die selbst genügend nahe an der kritischen Schallgeschwindigkeit liegen muß. Im Unendlichen haben U und V zu verschwinden. Das umströmte Profil wird durch Vorgabe von V auf der x -Achse (Symmetrieachse) festgelegt: $V(x, 0) = V_0(x)$. Gemäß der Wahl der abhängigen und unabhängigen Variablen führt dies zu einem Ähnlichkeitsgesetz, wonach die zu jedem festen $V_0(x)$ gehörige Schar von Strömungen untereinander affin verzerrte Profile liefert; dickeren Profilen (innerhalb des Gültigkeitsbereiches der Näherung)

kommen in jeder solchen Schar niederere Machzahlen der Anströmung und stärkere Geschwindigkeitsdifferenzen am Profil zu. — Das in dieser Weise vereinfachte Problem läßt sich auf die äquivalente Integralgleichung

$$U(x, y) = U_p(x, y) + \frac{U^2(x, y)}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U^2(\xi, \eta)}{2} \frac{(\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]^2} d\xi d\eta$$

zurückführen, worin $U_p(x, y)$ die durch die Prandtlsche Regel zu berechnende Geschwindigkeitsverteilung bezeichnet. ($U - U^2/2$ stellt bei dieser Näherung im wesentlichen die Stromdichte dar.) — Ein Näherungsansatz zur Lösung dieser Gleichung wird vorgeschlagen und auf den Fall des Kreisbogenzweiecks angewandt.

H. Görtler (Freiburg i. Br.).

Holt, M.: Flow patterns and the method of characteristics near a sonic line. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 2, 246—256 (1949).

In der vorliegenden Arbeit werden zunächst die geometrischen Bedingungen für eine ebene Gasströmung in der Nähe der Schallgrenze aufgestellt und dann ein numerisches Integrationsverfahren für die Bewegungsgleichungen in der Nähe der Schallgrenze abgeleitet, wo die üblichen Methoden auf der Grundlage der Charakteristiken versagen. An der Schallgrenze berühren sich die beiden Scharen von Machschen Linien, und ihre Krümmung ist dort im allgemeinen unendlich groß. Näherungsweise können die Machschen Linien in der Nachbarschaft der Schallgrenze durch semi-kubische Parabeln, die Isoklinen (Linien gleicher Strömungsrichtung) als Parabeln und die Äquipotentiallinien als kubische Parabeln dargestellt werden. Singuläre Stellen ergeben sich dort, wo die Krümmung der Stromlinien auf der Schallgrenze verschwindet. An einer solchen Stelle berühren die Machschen Linien die Schallgrenze mit unstetiger, jedoch endlicher Krümmung, wobei der eine Zweig der Machschen Linien der einen Schar gleich dem an der Schallgrenze reflektierten Zweig der Machschen Linien der zweiten Schar ist. Auch die übrigen geometrischen Bestimmungsstücke zeigen an einer solchen singulären Stelle ein abweichendes Verhalten. Weiterhin werden zwei Fortsetzungsverfahren angegeben, um die Strömung, ausgehend von der Schallgrenze, in einem charakteristischen Dreieck zu bestimmen. Das erste Verfahren macht Gebrauch von einer doppelten Taylorentwicklung für die Geschwindigkeitskomponenten. Beim zweiten Verfahren werden in der Umgebung eines Punktes der Schallgrenze Reihenentwicklungen für die kartesischen Koordinaten einer Machschen Linie gegeben, und zwar nach Potenzen des Ergänzungswinkels zum Machschen Winkel. In einem weiteren Abschnitt wird der umgekehrte Fall diskutiert, wenn man, von einem bekannten Charakteristiken-netz ausgehend, in der Nähe der Schallgrenze bis zu dieser Grenze selbst vorstoßen will. Ein abschließender Abschnitt behandelt die Übertragung dieser zunächst nur für ebene Strömungen abgeleiteten Rechenmethoden auf axialsymmetrische Strömungen.

Wuest (Göttingen).

Leray, Jean: Fluides compressibles. Application à l'aile portante d'envergure infinie de la méthode approchée de Tschapliguine. J. Math. pur. appl., Paris, IX. S. 27, 181—191 (1949).

In Erweiterung der Tschapliginschen Methode auf den Fall nichtverschwindenden Auftriebs gibt Verf. eine Abbildung an, durch die eine ebene, stationäre, wirbelfreie, inkompressible Strömung um ein Profil übergeht in eine ebensolche kompressible Unterschallströmung um ein Vergleichsprofil, wobei das Tschapliginsche Druck-Dichte-Gesetz gilt. Für kleine Machsche Zahlen (unterhalb 0,6) ergibt sich eine Verschärfung der Prandtlschen Regel.

Weissinger (Hamburg).

Prim, R. and P. Neményi: On a family of rotational spatial gas flows. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 2, 129—135 (1949).

Die Tollmiensche Untersuchung (1937) ebener kompressibler Potentialströ-

mungen, bei denen die beiden Geschwindigkeitskomponenten nur von einer der krummlinigen Koordinaten abhängen, wird in der vorliegenden Arbeit dahingehend erweitert, daß noch eine Geschwindigkeitskomponente senkrecht zu dieser Netzebene zugelassen wird, die ebenfalls nur von dieser einen isometrischen Koordinate abhängt, und die Beschränkung auf wirbelfreie Strömungen fallen gelassen wird. Auch in diesem verallgemeinerten Fall existieren Lösungen nur dann, wenn das krummlinige Koordinatennetz aus logarithmischen Spiralen und ihren Grenzfällen besteht. Es ergeben sich verschiedene Klassen von räumlichen, nicht wirbelfreien Gasströmungen, und zwar teilweise in expliziter Form, teilweise auch als Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen. *Wuest (Göttingen).*

Prim, R. C.: On the existence of steady gas flow in plane isothermal streamline patterns. Bull. Amer. math. Soc. **54**, 1009—1012 (1948).

Für ein ideales, d. h. nicht zähes und wärmeleitendes Gas mit konstanten spezifischen Wärmen ohne Einwirkung äußerer Kräfte werden die konform auf Parallelströmung abbildbaren stationären Strömungen untersucht. Unter Voraussetzung stetiger dritter Ableitungen der Geschwindigkeit ergibt sich, wie unabhängig vom Verf. auch D. Gilbarg [Flow patterns common to certain classes of plane fluid motions; J. Math. Physics, Massachusetts **26**, 137—142 (1947)] für den Fall der wirbelfreien Strömung zeigte, ohne diese Einschränkung ganz allgemein, daß als Stromlinientypen nur konzentrische Kreise, Geradenbüschel und parallele Geraden in Frage kommen. *Grell (Berlin).*

● **Ribaud, Gustave et Edmond Brun: La convection forcée de la chaleur. Fluide s'écoulant normalement à un cylindre.** (Mémorial des Sciences Physiques Nr. 50.) Paris: Gauthier-Villars 1948. 77 p.

Nachdem die Verff. bereits früher in den Nummern 40 und 46 dieser Schriftenreihe den Wärmeübergang durch erzwungene Konvektion bei laminarer und turbulenter Strömung untersucht haben, geben sie hier eine zusammenfassende Darstellung über die erzwungene Konvektion bei Strömungen um zylindrische Körper. Kap. I behandelt die Strömung senkrecht zur Achse eines Kreiszylinders: Vollkommene Flüssigkeit, die laminare Grenzschicht, das Totwasser, die Reynolds-Stantonsche Beziehung zwischen Reibungswiderstand und Konvektion, Bemerkungen über die Messungen, Ergebnisse der Messungen in Luft, der Messungen in anderen Flüssigkeiten, Messungen des örtlichen Konvektionskoeffizienten (Verteilung der Wärmeübergangszahl über den Umfang). Kap. II behandelt die Strömung um andere zylindrische Körper: Die Strömung um einen Keil vom Öffnungswinkel β (ähnliche Lösungen der Grenzschichtgleichungen), die Konvektion in diesem Fall, die Strömung um beliebige Körper, d. i. bei beliebigem Druckverlauf, die zugehörige Konvektion, die Sonderfälle des elliptischen Zylinders, des Tragflügels, des Rotationskörpers, Bemerkung über den Einfluß der Erwärmung des Körpers auf die Grenzschicht. Kap. III beschließt diesen Überblick mit 4 Abschnitten über die senkrechte Umströmung von Rohrbündeln: Bemerkung über die Messungen, Ergebnisse von Wärmeübergangsmessungen bei Rohrbündeln, Verluste in Rohrbündeln, allgemeine Betrachtungen über Wärmeaustausch. *Riegels (Göttingen).*

● **Ribaud, Gustave et Edmond Brun: La convection de la chaleur aux grandes vitesses.** (Mémorial des Sciences Physiques Nr. 51.) Paris: Gauthier-Villars 1948. 61 p.

Mit diesem Bändchen setzen die Verff. die Reihe ihrer Übersichtsberichte fort und betrachten nunmehr die Konvektion bei großen Geschwindigkeiten. Kap. I behandelt in 8 Abschnitten die theoretischen und experimentellen Grundlagen. Kap. II handelt in sieben weiteren Abschnitten von der Konvektion bei großen Geschwindigkeiten. Neben verschiedenen Definitionen für die Wärmeübergangszahl wird darin das fundamentale Gesetz für große Geschwindigkeiten aufgestellt. Schließlich bringt Kap. III in vier Abschnitten theoretische Betrachtungen über

die Diffusion und die Analogien zwischen laminarer bzw. turbulenter Diffusion und laminarer bzw. turbulenter Konvektion und schließt mit einem weiteren Abschnitt über experimentelle Arbeiten zur Verifizierung dieser Analogien. *Riegels.*

Bammert, K. und H. Kläukens: Nabentotwasser hinter Leiträdern von axialen Strömungsmaschinen. *Ingenieur-Arch.* 17, 367—390 (1949).

Bei der Strömung durch das Leitrad von axialen Strömungsmaschinen (Axialturbinen, Axialverdichter) wurde beobachtet, daß in gewissen Fällen die Drallströmung hinter dem Rad nur den äußeren Teil des ringförmigen schaufellosen Raumes ausfüllt, während sich in der Nähe der Nabe ein sog. „Totwasser“ ausbildet, wo die Flüssigkeit nur umgewälzt wird, aber nicht an der axialen Bewegung teilnimmt. Die Entstehung dieses Totwassers hängt zusammen mit dem radialen Druckanstieg nach außen, der durch die Drallströmung bedingt ist und zur Folge hat, daß in dem schaufellosen Ringraum in axialer Richtung längs der Nabe ein wesentlich stärkerer Druckanstieg als an der Außenwand vorhanden ist. —Die Begrenzung des Totwassers wird aus der reibungslosen Drallströmung errechnet. Sie erweist sich stark abhängig vom Austrittswinkel der Strömung aus dem Leitrad: Je geringer dieser Austrittswinkel (= Winkel zwischen Umfangsrichtung und Strömungsrichtung) ist, desto größer ist der Radius der Totwasserzone. Die Rechnungen werden für gerade (unverwundene) und drallverwundene ($c_u \cdot r = \text{const.}$) Schaufeln ausgeführt. Der Einfluß der Flüssigkeitsreibung auf die Ausbildung des Totwassers wird diskutiert. *H. Schlichting* (Braunschweig).

Relativitätstheorie:

● **Einstein, Albert et Léopold Infeld:** L'évolution des idées en physique, des premiers concepts aux théories de la relativité et des quanta. Traduit de l'anglais par Solovine. (Bibliothèque de Philosophie scientifique.) Paris: Flammarion 1948. VI, 298 p. avec 73 fig. et III pl. hors texte; 330 fr.

Narlikar, V. V. and Ayodhya Prasad: The Doppler effect in the field of a thick spherical shell. *Proc. Indian Acad. Sci. A* 30, 181—183 (1949).

Das relativistische Feld einer Kugelschale aus Materie besteht aus einem euklidischen Teil im Inneren und einem Riemannschen außerhalb. Unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen auf der Kugelschale werden Ausdrücke für die Metrik des Feldes abgeleitet. Es ergibt sich eine Dopplerverschiebung nach Violett für Licht, das die Schale von außen durchdringt. *Johannes Ax* (Hamburg).

Clark, G. L.: On the gravitational mass of a system of particles. *Proc. R. Soc. Edinburgh, A* 62, 412—423 (1948).

Unter Ergänzung und Verschärfung früherer Ergebnisse von Ruse wird gezeigt: Ist ein im Unendlichen asymptotisch euklidischer Raum deformiert durch ein System von n Massenpunkten, so ist das über eine sehr große Kugel erstreckte Flächenintegral der Normalkomponente der Gravitationskraft gleich -4π mal Energieinhalt des Systems. In dieser Form bleibt also der Gaußsche Satz der elementaren Theorie erhalten. *P. Jordan* (Hamburg).

Clark, G. L.: The equivalence of the gravitational and invariant mass of an isolated body at rest. *Proc. R. Soc. Edinburgh, A* 62, 424—426 (1948).

Enthält einen Nachtrag zu vorsteh. Ref.

P. Jordan (Hamburg).

Clark, G. L.: The internal and external fields of a particle in a gravitational field. *Proc. R. Soc. Edinburgh, A* 62, 427—433 (1948).

Schon 1916 hat de Sitter das Gravitationsfeld eines Systems von Massenteilchen untersucht. Eine Korrektur dazu wurde 1938 von Eddington und dem Verf. ausgeführt. Das verbesserte Ergebnis betreffs des Potentials g_{44} stimmt zwar überein mit Formeln, welche Einstein, Infeld und Hoffmann auf ganz anderem Wege erhielten; jedoch ist die Beweisführung de Sitters, wie jetzt gezeigt wird, auch in der verbesserten Form von 1938 noch unzulänglich. Die bestehende Lücke wird jetzt ausgefüllt. *P. Jordan* (Hamburg).

Hessaby, M.: Continuous particles. Proc. nat. Acad. Sci. USA 33, 189—194 (1947).

Verf. untersucht den Einfluß der Energiedichte des elektromagnetischen Feldes auf die Metrik, indem er den Maxwell'schen mit dem Energie-Impuls-Tensor der Gravitation identifiziert. Für den Fall kugelsymmetrischer Lösungen rechnet Verf. in nicht immer durchsichtiger Weise eine partikelähnliche Energieverteilung aus, zu der ein elektrostatisches Potential gehört, das zwischen $1,8 \cdot 10^{-13}$ cm und $3,7 \cdot 10^{-13}$ cm attraktiv wird.

Bauer (München).

Bennett, J. G., R. L. Brown and M. W. Thring: Unified field theory in a curvature-free five-dimensional manifold. Proc. R. Soc., London, A 198, 39—61 (1949).

Verff. versuchen eine Theorie für das Gravitations- und das elektromagnetische Feld zu entwerfen, die von einem euklidischen fünfdimensionalen Raum ausgeht. In diesen ist der „Beobachter“ mit seinem vierdimensionalen Bezugssystem eingebettet. Nimmt man diese Einbettung von Punkt zu Punkt verschieden an, so ergibt sich die Möglichkeit für die Einführung von Feldgrößen. Leider erscheint gerade dieser Teil der Theorie nicht sehr zwangsläufig. Immerhin gelingt es den Verff., das Gravitationsfeld näherungsweise zu beschreiben ebenso wie das elektromagnetische Feld, die Bahn eines Massenpunktes als eine Gerade in fünf Dimensionen zu deuten und schließlich einen solchen Zusammenhang zwischen Gravitations- und elektromagnetischem Feld herzustellen, der für einen ungeladenen rotierenden Körper ein Magnetfeld ergibt, das um 10^{-20} kleiner ist als das entsprechende Feld eines aus elektrisch geladenen Elementarteilchen bestehenden Körpers, wobei 10^{40} das Verhältnis zwischen der Coulombschen Abstoßung und der Gravitationsanziehung zweier Elektronen ist.

G. Ludwig (Berlin).

Scherrer, W.: Über den Einfluß des metrischen Feldes auf ein skalares Materiefeld. Helvetica physica Acta 22, 537—551 (1949).

In dieser Arbeit werden die Feldgleichungen untersucht, die sich aus einem Variationsprinzip

$$\delta \int \left[(R - 2A) \psi^2 + \psi \omega G^{\alpha\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial x_\sigma} \right] \sqrt{-G} dx = 0$$

ergeben, wobei $G_{\alpha\sigma}$ der metrische Tensor, R der Krümmungsskalar, A , ω Konstante und ψ ein neu eingeführtes „Materiefeld“ sind. Für den speziellen Fall $A = \omega = 0$ gelingt es dem Verf., eine statische Lösung mit dem Linienelement

$$ds^2 = f^2 dx_0^2 - g^2 dr^2 - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

zu finden mit den Werten

$$r = a \sqrt{x^2 - 1} \left| \frac{x-1}{x+1} \right|^\beta; \quad g^2 = \frac{x^2 - 1}{(x + 2\beta)^2}; \quad f^2 = \left| \frac{x-1}{x+1} \right|^{\alpha-\beta}; \quad \chi^2 - \psi^4 = \left| \frac{x-1}{x+1} \right|^{-(\alpha+\beta)}$$

wobei x als Variable statt r benutzt ist und α, β beliebig sind. Definiert man den Energieimpulstensor durch $R_{\alpha\sigma} - \frac{1}{2} G_{\alpha\sigma} R + A G_{\alpha\sigma} = -k T_{\alpha\sigma}$, so ergibt sich für die obige statische Lösung eine Energiedichte

$$T_0^0 \sqrt{-G} = \frac{a(\alpha^2 - \beta^2)}{K} \left| \frac{x-1}{x+1} \right|^{(\alpha+\beta)/2} \frac{\sin \vartheta}{x^2 - 1}$$

mit $\sqrt{-G} = a^3 \left| \frac{x-1}{x+1} \right|^{(\alpha+5\beta)/2} (x^2 - 1) \sin \vartheta$ und eine Gesamtenergie

$$E = \frac{1}{K} 4\pi a (\alpha - \beta).$$

Obwohl also die Energiedichte sich für große Entfernungen r wie $\frac{1}{r^4}$ verhält, haben wir hier ein Beispiel einer an sich hinsichtlich der Dichte singulär werdenden Lösung mit endlicher Gesamtenergie. — Wegen der Kleinheit der Gravitationskonstanten ist aber aus Gründen der Dimensionsanalyse [P. Jordan, Die Herkunft der Sterne, Stuttgart 1947] kaum zu hoffen, daß man auf diesem Wege zu einer Klärung des Problems der Elementarteilchen gelangen könnte. Doch gibt diese Arbeit wieder

ein Beispiel mehr, wie man in nichtlinearen Feldtheorien zu mathematisch in sich widerspruchsfreien Lösungen für punktförmige „Teilchen“ kommen kann. *G. Ludwig.*

Osborne, M. F. M.: Quantum-theory restrictions on the general theory of relativity. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 75, 1570—1584 (1949).*

Es wird die Frage untersucht, wie weit die Begriffe der allgemeinen Relativitätstheorie anwendbar bleiben, wenn man die Ungenauigkeitsrelationen der Quantenmechanik berücksichtigt. Mit c als Lichtgeschwindigkeit, \hbar als Planckschem Wirkungsquantum und G als Gravitationskonstante erhält man als Beschränkung für die Masse M des Gravitation erzeugenden Feldes, dessen Krümmung noch meßbar ist: $(\hbar G/M^2) \ll 1$, was etwa $M \gg 10^{-5} g$ fordert. Dies gilt für einen Massenpunkt. Für eine Masse der Dichte ρ ergibt sich

$$(M/\rho)^{1/3} \ll G^2 M^3/c^3 \hbar, \text{ d. h. } M \gg 10^7/\rho^{1/3} g.$$

Weitere Abschätzungen für die Entfernung von der Masse, in der die Krümmung meßbar ist, werden aufgestellt. — Ungelöst scheint Ref. immer noch das Problem, ob es nicht eine quantentheoretische Formulierung der allgemeinen Feldgleichungen der Gravitation gibt, wie sie ja für schwache Felder durchaus möglich ist, und zu Gravitationsquanten vom Spin 2 führt. *G. Ludwig (Berlin).*

Schild, A.: Discrete space-time and integral Lorentz transformations. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 73, 414—415 (1948).*

Verf. betrachtet ein „hyperkubisches Gitter“ im Minkowski-Raum: die Gesamtheit aller Vektoren $x^i \equiv (t, x, y, z)$ mit ganzzahligen Komponenten (Lichtgeschwindigkeit $c = 1$), und untersucht die Untergruppe der eigentlichen Lorentzgruppe, die das Gitter als Ganzes invariant läßt. Diese „ganze Lorentzgruppe“ ist diskret und unendlich; ihre Eigenschaften werden aus ihrer Darstellung durch zweidimensionale Spintransformationen mit Hilfe elementarer zahlen-theoretischer Sätze erschlossen. Der (x, y, z) -Unterraum ist in bestimmtem Sinne homogen und isotrop. Dem Versuch, einen derartigen Gitterraum in der Physik zugrunde zu legen und so die bekannten Unendlichkeitsschwierigkeiten zu umgehen, steht entgegen, daß sich für die kleinste, einer ganzen Lorentz-Transformation zugeordnete Geschwindigkeit der Wert $\frac{1}{2}\sqrt{3} = 0,866$ der Lichtgeschwindigkeit ergibt. Die Arbeit enthält nur die Ergebnisse der Untersuchungen, deren Begründung in einer späteren Veröffentlichung erfolgen soll. *Urich (Berlin),*

Atomphysik.

Quantenmechanik:

• **Heisenberg, W.:** Two lectures. 1: The present situation in the theory of elementary particles; 2. Electron theory of superconductivity. Cambridge: At the University Press, 1949. 52p. 3 s. 6 d. net.

In der ersten der Vorlesungen werden die bekannten Divergenzen der gequantelten Wellentheorie der Materie als notwendige Züge der Theorie angesehen, die nur bei niedrigen Energien eine Annäherung ist. Die in ihr ausgesprochene Korrespondenz zwischen Wirklichkeit und anschaulicher Beschreibung ist nur da zu erwarten, wo Kräfte großer Reichweite (in Elektrodynamik und Gravitation) auftreten. Im allgemeinen Fall braucht es darum auch keine Hamiltonfunktion zu geben; vielleicht ist nur die S -Matrix sinnvoll, die das Verhalten bei großen Abständen beschreibt (vgl. dies. Zbl. 28, 279). Als nächste Aufgabe wird das Studium dieser S -Matrix angesehen. — In der zweiten Vorlesung wird die Supraleitung als Folge einer Kondensation der Elektronen angesehen, des Übergangs in einen Ordnungszustand infolge der Coulombkräfte. Die Umwandlungsenergie ist sehr klein und sehr empfindlich von besonderen Eigenschaften des Metalls abhängig. Ein Zustand mit Strom kann als stabiler Zustand bei tiefen Temperaturen auftreten. Die vorliegende Auffassung bringt verschiedene Züge früherer Theorien in einen folgerichtigen Zusammenhang. *F. Hund (Jena).*

Dirac, P. A. M.: The theory of magnetic poles. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 74, 817—830 (1948).*

Die früher vom Verf. gezeigte Möglichkeit einzelner Magnetpole, deren Stärke g

durch $eg = \hbar c/2$ bestimmt war (dies. Zbl. 2, 305), wird in eine folgerichtige Theorie eingebaut, in der Ladungen und Pole mittels eines elektromagnetischen Feldes aufeinander wirken. Als Feldgleichungen für den elektromagnetischen Sechsertensor $F_{\mu\nu}$ und den dazu dualen Sechsertensor $(F^+)_{\mu\nu}$ werden $\partial F_{\mu\nu}/\partial x_\nu - j_\mu$ (wie in der Maxwellschen Theorie) und $\partial(F^+)_{\mu\nu}/\partial x_\nu = -k_\mu$ angenommen (der Pseudovektor k_μ ist in der Maxwellschen Theorie null). Zur Quantelung müssen Potentiale eingeführt werden; die jetzt notwendige Verletzung der Gleichung

$$F_{\mu\nu} = \partial A_\nu/\partial x^\mu - \partial A_\mu/\partial x^\nu$$

wird nur auf „Schnüren“ angenommen, an deren Enden eben Magnetpole sitzen. Die Bewegungsgleichungen der Ladungen und der Pole lassen sich aus einem Variationsprinzip ableiten (mit einer gewissen Glättung der Feldgrößen in der Nähe der Ladungen und Pole). Übergang zum Hamiltonschen Schema und Quantelung führt auf Wellengleichungen für die Ladungen — Diracsche Gleichungen — und für die Pole — bei Spin $\hbar/2$ Diracsche Gleichungen ohne elektromagnetische Größen. — Das Feld wirkt aber auf die Pole über die Bewegungsgleichungen für die Schnüre. Mehrdeutigkeit des Wirkungsintegrals um ganzzahlige Vielfache von $4\pi ge$ verlangt, daß diese Größe ganzzahliges Vielfaches von \hbar ist. Ladungen und Pole sind dann ganzzahlige Vielfache von Elementarladungen e_0 und Elementarpolen g_0 , für die $e_0 g_0 = \hbar/2$ ist. Die Theorie enthält ähnliche Divergenzen wie die gewöhnliche Quantenelektrodynamik. Symmetrie zwischen Polen und Ladungen besteht, da im Formalismus die Rolle der Pole und Ladungen vertauscht werden kann. Wegen des empirischen Wertes von $e_0^2/\hbar c$ ergibt sich aber g_0 viel größer als e_0 . *F. Hund.*

Mercier, André et Édouard Keberle: L'énergie et le temps, et les relations cano-niques. Arch. Sci., Genève 2, 186—192 (1949).

Auf drei Seiten wird von den Verff. in manchen Lehrbüchern unklar oder sogar falsch dargestellte Zusammenhang zwischen Zeit und Energie in der klassischen wie in der Quantenmechanik klargestellt. Energie und Zeit sind weder in der klassischen noch in der Quantenmechanik kanonisch konjugierte Variablen. Diese Tatsache wird in dem Artikel in der klassischen Mechanik auf Grund des Hamiltonschen Formalismus und der Poissonklammern eindeutig bewiesen; und deutet man diesen Beweis um in die Quantenmechanik durch Ersetzen der Poissonklammern durch Vertauschungsrelationen, so ist er auch hier gültig. — Würde für die Zeit t und den Hamiltonoperator H die Vertauschungsrelation $[t, H] = 1$ gelten, so gäbe es auch für ein abgeschlossenes System in einem äußeren Feld keine diskreten Energiewerte, weil die obige Vertauschungsrelation ein kontinuierliches Spektrum für H zur Folge hätte. Die Ungenauigkeitsrelation im Energiesatz $\Delta E \Delta t \geq \hbar$ bei Wechselwirkung zweier Systeme ist eine Folge der Schrödingergleichung. Daß trotz dieser Verschiedenartigkeit zwischen den drei räumlichen Impulsen p_1, p_2, p_3 und der Energie $p_4 = H$ eine relativistisch invariante Theorie möglich ist, zeigt die Diracgleichung. Wesentlich für die Auszeichnung der Zeit trotz relativistischer Invarianz ist die Tatsache des hyperbolischen Charakters der Diracgleichung. *G. Ludwig (Berlin).*

Päsler, Max: Behandlung des Raumrotators im Unterbereich der Laplace-Transformation. Ann. Physik, VI. F. 6, 365—374 (1949).

Die Schrödingergleichung des räumlichen Rotators wird nach Anwendung der Laplace-Transformation im „Unterbereich“ der Transformation behandelt. Je nachdem, ob man im Oberbereich die trigonometrischen Funktionen der Winkel oder diese selbst als Variable behandelt, kommt man auf Differential- bzw. Funktionalgleichungen für die Funktionen des Unterbereichs. Für die Differentialgleichungen werden die Grenzbedingungen und zugehörigen Lösungen angegeben.

Volz (Erlangen).

Serpe, J.: Two-component wave equations. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 1538 (1949).

Jehles Gleichung (dies. Zbl. 33, 42) ist äquivalent einer Gleichung für vier reelle Komponenten und Diracsche Beziehungen für die Matrizen. Sie hängt dann mit der Majoranaschen Fassung der Theorie der Teilchen mit Spin 1/2 (dies. Zbl. 16, 427) zusammen.

F. Hund (Jena).

Wheeler, J. A. and R. P. Feynman: Classical electrodynamics in terms of direct interparticle action. Rev. modern Physics, New York 21, 425—433 (1949).

In Fortsetzung einer früheren Arbeit [Wheeler, Feynman, Rev. modern Physics, New York 17, 157—181 (1945)] wird hier eine in sich konsequente Fernwirkungstheorie des Elektromagnetismus gegeben, in der die Symmetrie zwischen Vergangenheit und Zukunft wie in der klassischen Mechanik gewährleistet ist und die keine Wirkungen eines Teilchens auf sich selbst enthält. Dies ist der Grund, der diese Theorie den früheren Feldtheorien überlegen macht, weil es in ihr keine unendliche Feldenergie eines punktförmigen Teilchens gibt. Ist also nur ein Teilchen in der Welt, so erfährt dies keine elektromagnetischen Kraftwirkungen, da diese nur von anderen Teilchen herrühren könnten. Dies scheint der experimentell gesicherten Strahlungsdämpfung zu widersprechen. Aber in der ersten Arbeit (l. c.) zeigten die Verff., daß die Anwesenheit eines „Absorbers“, d. h. vieler Teilchen, wieder zu den bekannten retardierten Ausdrücken für die Ausstrahlung führt. — Der Ausgangspunkt der Fernwirkungstheorie ist das Variationsproblem,

$$J = - \sum_a m_a c \int (-da_\mu da^\mu)^{\frac{1}{2}} + \sum_{a < b} (e_a e_b / c) \iint \delta((a-b)^2) da_\nu db^\nu$$

stationär zu machen, wobei sich die Integrale über die Weltlinien der Teilchen a und b erstrecken, $(-da_\mu da^\mu)^{\frac{1}{2}}$ das Element der Eigenzeit ist und $\delta((a-b)^2)$ die Diracsche δ -Funktion vom Quadrat der Weltentfernung $(a_\mu - b_\mu)(a^\mu - b^\mu)$ der beiden Teilchen a und b ist. — Das, was die Fernwirkungstheorie im ersten Augenblick so paradox erscheinen läßt, ist die Wirkung des einen Teilchens b auf das andere a nicht nur in die Zukunft hinein, sondern auch in die Vergangenheit. Dies scheint dem normalen Kausalempfinden zu widersprechen. Verff. zeigen, daß man bei Ausschaltung des menschlichen Elementes nicht zu einem Widerspruch kommen kann. Die Auflösung aller scheinbaren Widersprüche beruht auf der bisher ungewohnten Tatsache, daß die Bahnen in der Welt (d. h. in Raum und Zeit) nicht mehr als sich langsam Schritt für Schritt entwickelnde gedacht werden können, sondern als fertige Struktur vorliegen, in der jede Veränderung von etwaigen äußeren Kräften das Ganze verändert. Man muß sich bei dieser Theorie gewöhnen, „auf einen Blick“ die ganze Weltstruktur zu sehen. Die physikalische Beobachtung entspricht dann nur einem Herübergleiten eines Schnittes $t = \text{const.}$ von der Vergangenheit in die Zukunft. — Die Bewegungsgleichungen der Teilchen lauten:

$$m_a c^2 \ddot{a}_m = e_a \sum_{b \neq a} F_{m n}^{(b)}(a) \dot{a}^n \quad \text{mit} \quad F_{m n}^{(b)}(x) = \frac{\partial A_m^{(b)}(x)}{\partial x^n} - \frac{\partial A_n^{(b)}(x)}{\partial x^m},$$

wobei die Abkürzung

$$A_m^{(b)}(x) = e_b \int \delta((x-b)^2) db_m$$

eingeführt wird, die in der Maxwellschen Theorie dem Viererpotential (und zwar 1/2 retardiert + 1/2 avanciert) eines Teilchens entspricht. — Der Energieimpulsvektor für mehrere Teilchen mit Einschluß ihrer Wechselwirkung läßt sich ebenfalls definieren und ergibt z. B. für zwei Teilchen:

$$G_m(\alpha, \beta) = m_a c^2 \dot{a}_m(\alpha) + m_b c^2 \dot{b}_m(\beta) + 2e_a e_b \left\{ \int_{\alpha}^{\infty} \int_{-\infty}^{\beta} - \int_{-\infty}^{\alpha} \int_{\beta}^{\infty} \right\} \delta'((a-b)^2) \\ \cdot [(a_m - b_m)_m da^\mu db_\mu - db_m da^\mu (a_\mu - b_\mu) - da_m db^\mu (a_\mu - b_\mu)].$$

Die von den Verff. aufgestellte Fernwirkungstheorie erklärt also alle makroskopischen elektromagnetischen Erscheinungen und enthält keine unendlichen Selbstenergien der Teilchen. Hier wird einer der wichtigsten Gedanken klassisch konsequent durch-

geführt, der, wenn es gelingt, ihn in die Quantenmechanik zu übertragen, eine Möglichkeit verspricht, eine in sich widerspruchsfreie Quantenelektrodynamik zu formulieren, ohne auf die ungelösten Schwierigkeiten der Elementarteilchen und ihrer Umwandlungen eingehen zu müssen, die dann voraussichtlich bis zu Energien in der Größenordnung der Mesonenruhemasse mit der Erfahrung übereinstimmende Resultate liefern wird.

G. Ludwig (Berlin).

Eliezer, C. Jayaratnam: A note on electron theory. Proc. Cambridge philos. Soc. **46**, 199—201 (1950).

Für ein kugelförmiges Elektron mit der Ladung an der Oberfläche kann die nichtrelativistische Bewegungsgleichung, die zeitliche Ableitungen beliebig hoher Ordnung enthält, durch eine einfache Differenzengleichung ersetzt werden. Für ein kräftefreies Elektron läßt sie eine periodische Bewegung zu. *Hund* (Jena).

Weisskopf, Victor F.: Recent developments in the theory of the electron. Rev. modern Physics, New York **21**, 305—315 (1949).

Eine Übersicht über die Entwicklung der Schwierigkeiten um die Struktur des Elektrons, von der Theorie von H. A. Lorentz bis zu den neuesten Entwicklungen der Quantenelektrodynamik. Deren Idee und Erfolg wird an Hand einer elementaren, auf Betrachtungen der Nullpunktsschwankungen im Strahlungshohlraum fußenden Berechnung der Termverschiebungen im Wasserstoff durch die Rückkopplung des Elektrons an sein Feld („Lamb-shift“) erläutert. *Schafroth* (Zürich).

Hu, Ning: On the treatment of quantum electrodynamics without eliminating the longitudinal field. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. **76**, 391—396 (1949).

Es wird ein allgemeiner Beweis gegeben für die häufig verwendete Tatsache, daß in quantenelektrodynamischen Streuproblemen (d. h. q. el. Problemen, welche sich durch eine S -Matrix im Sinne Heisenbergs beschreiben lassen) die Lorentzsche Neben- (oder Anfangs-) Bedingung weggelassen werden kann, wenn man gleichzeitig als „Vakuum“ denjenigen Zustand bezeichnet, in welchem weder transversale noch longitudinale Photonen vorhanden sind. Zunächst wird in üblicher Weise die Nebenbedingung zur Elimination der longitudinalen Feldkomponenten verwendet und damit die S -Matrix aufgestellt. Dieser Ausdruck kann dann durch geeignete Umformungen in die Form übergeführt werden, welche man unter Vernachlässigung der Nebenbedingung und mit obiger Definition des (sog. „falschen“) Vakuums erhält.

Schafroth (Zürich).

Moorhouse, R. G.: Bosons in an electromagnetic field. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. **76**, 1691—1696 (1949).

Eine Theorie der Elektrodynamik von Boseteilchen vom Spin Null oder Eins wird gegeben, welche dank der Verwendung der Kemmer-Duffinschen β -Matrizen starke Analogien zur Schwingerschen Behandlung der Quantenelektrodynamik des Elektrons aufweist. Eine gewisse Komplikation bilden dabei Terme im Hamiltonoperator, welche explizite von der Zeitrichtung abhängen; doch kann im Anschluß an japanische Autoren die Integrabilität der Schrödingergleichung gezeigt werden. Die Eichinvarianz der Theorie wird explizite nachgerechnet, worauf nach bekanntem Muster das Verschwinden der Photonselbstenergie (dargestellt durch ein unbestimmtes divergentes Integral) zwecks innerer Konsistenz der Theorie postuliert werden muß. Die Selbstenergie $\sim e^2$ der Teilchen ergibt sich als quadratisch divergenter Ausdruck von der Form einer Massenrenormalisation, und der divergente Teil der Vakuumpolarisation (2. Ordnung) läßt sich — wenigstens für Spin 0 — als reine Ladungsrenormalisation deuten.

Schafroth (Zürich).

Hamilton, J.: Radiative reaction and damping in scattering. Proc. physic. Soc., London, Sect. A **62**, 749—762 (1949).

Am Beispiel der Streuung eines Elektrons an einem elektrostatischen Feld wird gezeigt, daß die Ultrarotdivergenzen der strahlungstheoretischen Korrekturen sich in richtiger Weise mit denen der Streuung unter Emission mehrerer Photonen

kompensieren: Dabei ist eine (in Analogie zur Bloch-Nordsieck-Transformation) für hohe Frequenzen zuerst von Dancoff verwendete Transformation, welche „freie“ (d. h. nur noch reellen Wechselwirkungen unterworfenen) Elektronen und Photonen einführt, von ausschlaggebender Bedeutung. *Schafroth* (Zürich).

Costa de Beauregard, Oliver: Covariance relativiste en théorie du photon super-quantifié. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 296—298 (1949).

Überlegungen der Schwingerschen kovarianten Quantenelektrodynamik (dies. Zbl. **32**, 94) werden auf de Broglies Lichttheorie (dies. Zbl. **33**, 94) angewandt. *F. Hund* (Jena).

Fröberg, Carl-Erik: Calculation of the potential from the asymptotic phase. II. Ark. Mat. Astron. Fysik A **36**, Nr. 11, 55 S. (1949).

Zu Teil I vgl. dies. Zbl. **30**, 92. — Bei der theoretischen Betrachtung von Streuproblemen pflegt man im allgemeinen von einem vorgegebenen Potential $V(r)$ ausgehend den Streuquerschnitt $\sigma(\vartheta)$ eines einfallenden Massenstromes

$$\sigma(\vartheta) = \frac{1}{4k} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \vartheta) \cdot (e^{2i\delta_l(k)} - 1) \right|^2$$

aus den Phasenwinkeln $\delta_l(k)$ zu berechnen, um welche eine einlaufende Welle mit Teilchenenergie e^{-ikr} beim Auslaufen in der Phase verschoben wird ($e^{+i(kr - l\pi/2 + \delta_l(k))}$ für $r \rightarrow \infty$), während die $\delta_l(k)$ ihrerseits durch das Potential bestimmt sind: — In der vorliegenden Arbeit ist dagegen — nahegelegt durch Probleme aus der Kernphysik — diese Fragestellung umgekehrt. Es wird (im letzten Kapitel) ein Verfahren entwickelt, die $\delta_l(k)$ zu berechnen aus vorgegebenem $\sigma(\vartheta; k)$. Weiter — und dieses Problem steht im Mittelpunkt der Untersuchung — wird das hier unbekannte Potential $V(r)$ aus gegebenen Werten $\delta_l(k)$ berechnet. Im Sinne einer Bornschen Näherung entsteht dabei aus den $\delta_l(k)$ allein zunächst ein genähertes Potential $V^{(1)}(r)$ und als nächstes $V^{(2)} = V^{(1)} + \Delta V$, wobei ΔV dann nur noch von $V^{(1)}$ allein abhängt. Speziell für $l=0$ lauten die Formeln (mit $\hbar^2/2m = 1$):

$$V^{(1)}(r) = -\frac{8}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \delta_l(k) \cos 2kr \, dk,$$

$$\Delta V(r) = \frac{8}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk}{k} \cos 2kr \int_0^{\infty} dx V^{(1)}(x) \sin 2kx \int_0^{\infty} dy V^{(1)}(y) \sin^2 ky.$$

Insbesondere wird die letztere Formel sehr ausführlich diskutiert. Dabei stellt sich heraus: $\int_0^{\infty} \Delta V(r) \, dr = 0$. Das mittlere Potential der ersten Näherung wird also durch

ΔV nicht mehr geändert. Explizit wird ΔV für 3 spezielle Ansätze von $V^{(1)}$ berechnet: Yukawapotential e^{-kr}/r , Gaußpotential $e^{-(kr)^2}$ und Potentialtopf. *Macke*.

Urban, P. und F. Schwarzl: Zum Streuproblem von Nukleonen. Acta physica Austriaca **2**, 368—378 (1949).

Die vorliegende Arbeit untersucht die Streuung von einem Nukleon (Proton, Neutron) an einem anderen Nukleon unter gleichzeitiger Emission eines Mesons. Dabei wird die Anfangsenergie des gestreuten Nukleons als groß gegenüber seiner Ruhenergie vorausgesetzt und unter Zugrundelegung der Kernaustauschkraft die skalare Yukawa-Theorie verwendet. Das Gewicht der Untersuchungen liegt auf der Diskussion und dem Vergleich der erhaltenen Ergebnisse mit den von Nordheim und Wang gefundenen Resultaten. *Ecker* (Bonn).

Breit, G.: The scattering of slow neutrons by bound protons. I. Methods of calculation. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. **71**, 215—231 (1947).

Zur Berechnung der Streuung von Neutronen an gebundenen Protonen wird eine Wellenfunktion von Proton + Neutron aufgesucht, welche folgenden Bedingungen, die im einzelnen begründet werden, genügt: a) Wenn r den Abstand

zwischen Proton und Neutron bedeutet, so soll die Wellenfunktion für $r \rightarrow 0$ die Form $(1 + a/r) \cdot f(r_p)$ haben, worin $f(r_p)$ eine Funktion der Protonenkoordinaten ist, die dafür sorgt und sich daraus bestimmt, daß b) in großen Abständen zwischen Proton und Neutron das „richtige“, d. h. eine elastische oder unelastische Streuung des Neutrons darstellende Verhalten sich ergibt. — Das Wechselwirkungspotential zwischen Neutron und Proton läßt sich durch geeignete Wahl der Konstanten a aus der Schrödingergleichung entfernen. Für die Lösung wird ein Entwicklungsansatz gemacht, der die verschiedenen Eigenzustände des gebundenen Protons enthält. Für kurze Reichweite der Kernkräfte wird das Problem auf eine Integralgleichung zurückgeführt. Mit dieser ist eine Beurteilung der Näherungscharaktere der früheren Rechnungen von Fermi (Enrico Fermi, *Ricerca Scient.* VII—II, 13, 1936) möglich. Volz (Erlangen).

Breit, G. and P. R. Ziesel: The scattering of slow neutrons by bound protons. II. Harmonic binding — Neutrons of zero energy. *Physic. Rev.*, Lancaster Pa., II. S. 71, 232—237 (1947).

Die im Teil I (s. vorsteh. Referat) entwickelte Methode wird auf die Berechnung des Streuquerschnitts von langsamen Neutronen an elastisch gebundenen Protonen angewendet. Die Rechnungen werden numerisch durchgeführt. Es zeigt sich, daß der Fermische Faktor 4 zwischen dem Wirkungsquerschnitt von gebundenen bzw. freien Protonen bis auf 0,3% richtig ist. Volz (Erlangen).

Feshbach, H. and V. F. Weisskopf: A schematic theory of nuclear cross sections. *Physic. Rev.*, Lancaster Pa., II. S. 76, 1550—1560 (1949).

Unter Vernachlässigung aller feineren Kerneigenschaften wird eine Theorie der Kernwirkungsquerschnitte insbesondere für Neutronen gegeben. Dabei wird zur Charakterisierung des Kerns lediglich der Kernradius und die kinetische Energie eines Nukleons im Inneren des Kerns herangezogen. Die berechneten Ergebnisse sind dementsprechend als Mittelungen über den wirklichen Funktionsverlauf zu betrachten und machen keine Aussagen über individuelle Schwankungen oder Resonanzerscheinungen. Die Berechnung erstreckt sich auf den totalen, den Reaktions- und den Transportwirkungsquerschnitt in Abhängigkeit von der Energie der einfallenden Neutronen. Die Berechnung des Reaktionswirkungsquerschnittes gelingt allerdings nur für sehr große und sehr kleine Einfallenergien. Der Vergleich mit den Experimenten liefert hinsichtlich des totalen Wirkungsquerschnittes für alle untersuchten Elemente brauchbare Übereinstimmung. Nur bei I, In und Sb erfordert die Übereinstimmung erzwungene Annahmen. Messungen des Wirkungsquerschnittes bei 14 MeV und des Transportwirkungsquerschnittes zwischen 0,1 und 1,5 MeV sind ebenfalls in Übereinstimmung mit der Theorie. Ecker (Bonn).

Ekstein, H.: Magnetic interaction between neutrons and electrons. *Physic. Rev.*, Lancaster Pa., II. S. 76, 1328—1331 (1949).

Für den Operator der magnetischen Wechselwirkung zwischen Neutronen und Elektronen wird entsprechend dem Vorschlag von F. Bloch statt des Ausdrucks $H = -\mu s B$ (μ = magnetisches Moment der Neutronen, s auf die Neutronenwelle wirkender Paulischer Spinoperator, B = magnetische Induktion) der allgemeine Ansatz $H = -\mu s (H + 4\pi CM)$ (M = Dichte des Spinn Moments der Elektronen, C = willkürliche Konstante) eingeführt. Für diesen allgemeinen Fall wird die Streuung durch ferromagnetische Kristalle und die magnetische Doppelbrechung berechnet. Die vorliegenden experimentellen Ergebnisse schließen den Wert $C = 0$ aus. Experimentelle Möglichkeiten für die Bestimmung der Konstanten C werden diskutiert. Ecker (Bonn).

Matthews, P. T.: The application of Dyson's methods to meson interactions. *Physic. Rev.*, Lancaster Pa., II. S. 76, 684—685 (1949).

Dyson (dies, Zbl. 32, 274) hat unter Kombination der Elektrodynamiken von Schwinger und Feynman verhältnismäßig einfache Regeln angegeben, die es er-

lauben, beispielsweise die Lamb-Retherford-Verschiebung direkt in Termen der invarianten Funktionen $D_F(x)$ und $S_F(x)$ niederzuschreiben. Der Verf. zeigt, daß diese Technik auch angewandt werden kann auf Wechselwirkungen mit Mesonen, die Ableitungen der Feldvariablen enthalten und daher zu Hamiltonfunktionen führen, die explizit von der Richtung der raumartigen Oberflächen abhängen. Die S -Matrix kann in der Form $U(\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(\infty)$ ausgedrückt werden. Die Summenterme sind nicht alle von gleicher Ordnung in der Kopplungskonstanten (g), und wenn man nach Potenzen von g ordnet, so erkennt man, daß die richtungsabhängigen Beiträge verschiedener konsekutiver U_n sich herausheben. Wessel (Dayton).

Bau der Materie:

Schweikert, G.: Zur Theorie des Gasdrucks gegen eine bewegte Wand. Z. angew. Math. Mech. 29, 289—300 (1949).

Verf. entwickelt auf der Grundlage der kinetischen Gastheorie eine Formel für den Gasdruck gegen eine bewegte Wand, wobei er der Änderung des Impulses der stoßenden Moleküle und der ihrer Geschwindigkeitskomponente in der zur Wand senkrechten Richtung infolge der Wandgeschwindigkeit Rechnung trägt. Die Dichte und Temperatur des Gases unmittelbar an der Wand werden hierbei als vorgegebene Größen betrachtet. Unter Zugrundelegung des Maxwell'schen Verteilungsgesetzes, wovon freilich mit zunehmender Wandgeschwindigkeit Abweichungen zu erwarten sein werden, gewinnt Verf. die erwähnte Formel für den Gasdruck p in Abhängigkeit von der Wandgeschwindigkeit v bzw. von der dimensionslosen Veränderlichen $v_r = v/\alpha$, wobei α den wahrscheinlichsten Wert der Molekulargeschwindigkeit bedeutet: $p = \frac{1}{2} \frac{\delta \alpha^2}{k \cdot g} \cdot B(v_r)$. δ ist die Dichte des Gases und $k = 1 + \vartheta$, das unabhängig von v_r vorausgesetzt wird, charakterisiert dessen Abweichung vom idealen Zustand, für den $k = 1$, $\vartheta = 0$ ist: Die charakteristische Funktion $B(v_r)$ bzw. deren Ableitung $dB(v_r)/dv_r$, die sich im wesentlichen auf das Gaußsche Fehlerintegral zurückführen lassen, werden tabellarisch ausgewertet, wodurch auch die Größe des Druckabfalles in Abhängigkeit von der Wandgeschwindigkeit ermittelt ist. Schließlich werden noch der Gasdruck auf die bewegte Wand bei Beachtung der Kompression und der Widerstand bewegter Flächen in Gasen bestimmt, wobei sich interessante Widerstandsformeln für die beiden Grenzfälle sehr kleiner und sehr großer Wandgeschwindigkeiten ergeben; es erweist sich im letzteren Falle der Widerstand prop. $1 + 2(1 - \vartheta^2)v_r^2$. Als Nebengewinn erhält Verf. schließlich noch eine interessante Näherungsformel für das Gaußsche Fehlerintegral für Argumentwerte $x > 2,5$, deren geringe Abweichungen von den genauen Werten aus einer Tabelle ersichtlich sind.

Karas (Darmstadt).

Landshoff, Rolf: Transport phenomena in a completely ionized gas in presence of a magnetic field. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 904—909 (1949).

Die von den freien Elektronen in einem ionisierten Gas getragene elektrische und thermische Leitfähigkeit wird in einem Magnetfeld reduziert infolge der durch die Bahnkrümmungen bedingten Änderung der effektiven freien Weglängen. Mathematisch läßt sich die Sachlage erfassen durch die Boltzmann-Gleichung für die Verteilungsfunktionen Φ der Elektronen und der positiven Ionen, die sich verhältnismäßig einfach behandeln lassen, wenn man nur die Wechselwirkung zwischen den Elektronen und den Ionen berücksichtigt. In der vorliegenden Arbeit wird der Fall eines vollständig ionisierten Gases behandelt, wo man mit der Rutherford'schen Streuformel und mit einer Abhängigkeit der freien Weglänge von der Geschwindigkeit proportional mit deren vierter Potenz rechnen kann; vor allem jedoch wird die Theorie nun erweitert durch die Berücksichtigung der Wechselwirkung zwischen

den Elektronen, in der tatsächlichen Durchführung allerdings nur in erster Näherung kleiner Druck- und Temperaturgradienten und schwacher elektrischer Felder; als spezieller Fall ist eingeschlossen die Annahme, daß die Streuung der Elektronen an Elektronen klein ist gegen die Streuung der Elektronen an Ionen. Ausgangspunkt ist die Boltzmann-Gleichung für die Verteilungsfunktion der Elektronen (für die Ionen ist die Abweichung von einer Maxwell-Verteilung praktisch zu vernachlässigen), die in der Operatorform allgemein lautet $D(\Phi) = -J_{ec}(\Phi) - \sum_i J_{ei}(\Phi F_i)$

mit

$$D(\Phi) = v_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{e}{m} \left\{ \left(E_x - \frac{v_z}{c} H \right) \frac{\partial \Phi}{\partial v_x} + \left(E_z + \frac{v_x}{c} H \right) \frac{\partial \Phi}{\partial v_z} \right\},$$

wenn das magnetische Feld H in der y -Richtung, das elektrische Feld E und der Temperaturgradient in der x, z -Ebene liegen. Die Operatoren $J_{ei}(\Phi F_i)$ und $J_{ec}(\Phi \Phi)$, worin F_i die Verteilungsfunktionen für die Ionen sind, lassen sich in bekannter Weise darstellen durch Boltzmannsche Integrale über den Lage-Geschwindigkeitsraum. Für F_i wird lokale Maxwell-Verteilung angesetzt:

$$F_i(x, z, V_i) = N_i B_i \pi^{-3/2} \exp(-B_i^2 v_i^2),$$

und für Φ die Form $\Phi(x, z, v) = C \cdot \exp(-\beta^2 v^2) (1 + v_x h_x(v) + v_z h_z(v))$. Hinsichtlich der Einzelheiten des Lösungsganges muß auf die Arbeit verwiesen werden. Letzten Endes handelt es sich um die Diskussion von zwei Typen von Integralen, mit der sich die beiden letzten Abschnitte beschäftigen. R. Seeliger (Greifswald).

Dingle, R. B.: Second sound and the behaviour of helium II. Proc. phys. Soc., London, Sect. A **62**, 154—166 (1949).

Verf. erklärt das thermodynamische Verhalten des HeII durch Anwendung der Debyeschen Theorie der spez. Wärme auf eine Biflüssigkeit (Dichte $\rho = \rho_n + \rho_s$, wobei ρ_n = Dichte der Normalkomponente und ρ_s = Dichte der superfluiden Komponente). Weil die normale Schallgeschwindigkeit u_1 etwa 13mal so groß wie die Phasengeschwindigkeit u_2 des second sound ist, geht in die Bestimmungsgleichung für die Debyesche Grenzfrequenz in 1. Näherung nur u_2 ein. Die zugehörige charakteristische Temperatur ist 2,2° K. Verf. erhält so Gleichungen für die innere Energie E , die Entropie S und die spez. Wärme C . Zur Bestimmung der beiden Unbekannten u_2 und ρ_s werden die Gleichungen $u_2^2 - TS^2 \rho_n / C \rho_s$ (Tisza) und $\rho_n / \rho = 4E/3u_2^2$ (Landau) herangezogen. Die Debyesche Theorie der Wärmeleitung (Dämpfung und Zerstreuung der Schallwellen) liefert eine Beziehung zwischen mittlerer freier Weglänge (reziproker Wert des Schwächungskoeffizienten) der second-sound-Wellen und Frequenz. Die Grenzfrequenz hat die kleinste überhaupt mögliche freie Weglänge von etwa $7 \cdot 10^{-7}$ cm bei 1,5° K. Es gelingt Verf., das Verhalten des Koeffizienten der thermischen Ausdehnung unterhalb des λ -Punktes (negatives Vorzeichen, kleiner absoluter Betrag) verständlich zu machen. Seine Theorie steht auch in Übereinstimmung mit Messungen von Peshkov über die Druckabhängigkeit von u_2 . Um sich von gewissen Willkürlichkeiten der Theorie zu befreien, trägt Verf. in § 9 seiner Arbeit der starken Temperaturabhängigkeit von u_2 Rechnung. Hierzu ändert er die bisherige Statistik der „Schallquanten“ nach einem Verfahren von Rushbrooke ab. Dieser hat gezeigt, daß man in der Zustandssumme $\sum \exp\left(-\frac{1}{kT} \sum_i n_i \epsilon_i\right)$ (n_i Besetzungszahlen der Energieniveaus ϵ_i) die Energiewerte ϵ_i mit ausreichender Genauigkeit durch temperaturabhängige „freie“ Energien f_i ersetzen darf. Die f_i genügen Gibbs-Helmholtzschen Gleichungen $f_i - T \cdot \partial f_i / \partial T = \epsilon_i$. G. U. Schubert (München).

Dingle, R. B.: The hydrodynamics of helium II. Proc. phys. Soc., London, Sect. A **62**, 648—655 (1949).

Die Arbeit dient zunächst der Ableitung der Landauschen phänomenologischen Gleichungen der Hydrodynamik des HeII in etwas verallgemeinerter Form. Als

Modell dient die Biflüssigkeit mit ihrer normalen und ihrer superfluiden Komponente. Wie bei Tisza haben beide Komponenten eigene Geschwindigkeitsvektoren und eigene Dichten. Im Gegensatz zu Tisza setzt Verf. die Entropie der superfluiden Komponente zunächst als von Null verschieden an. Wie in der klassischen Akustik werden Irreversibilität und Einfluß quadratischer Glieder vernachlässigt. Für Masse und Entropie gelten Erhaltungssätze. Ein Gedankenexperiment mit einem semipermeablen Kolben dient zur Bestimmung eines mechanisch-thermodynamischen Potentials, aus dem sich die mechanischen und verallgemeinerten thermodynamischen Kräfte herleiten lassen. Dadurch gelingt dem Verf. eine saubere Trennung der verschiedenen Freiheitsgrade, möchte man sagen: Kraftwirkung auf die Normalkomponente allein, Kraftwirkung auf die superfluide Komponente allein, Wirkung der mechanischen Kraft allein \sim Bewegung der Flüssigkeit als Ganzes (gewöhnlicher Schall!), Wirkung der thermodynamischen „Kraft“ allein \sim Relativbewegung der beiden Komponenten (second sound!). Durch Spezialisierung (Entropie der superfluiden Komponente gleich Null) ergeben sich die Landauschen Gleichungen. Schließlich werden Wärmeleitung und innere Reibung durch Ergänzung der Entropieerhaltungsgleichung und des Impulssatzes der Normalkomponente berücksichtigt.

G. U. Schubert (München).

Gorter, C. J.: On the thermodynamics of the two fluid model of Helium II. Physica, The Hague 15, 523—531 (1949).

Verf. betrachtet die normale und die superfluide Komponente des Biflüssigkeitsmodells des He II als Phasen im thermodynamischen Sinn und untersucht das Gleichgewicht zwischen Biflüssigkeit und Dampf. Es existiert kein Tripelpunkt. Dies ist nur möglich, wenn die freie Enthalpie des He II nicht linear vom Konzentrationsverhältnis der beiden Komponenten abhängt. Die Dampfphase interessiert weiter nicht, da sich als Gleichgewichtsbedingung ergibt, daß das Verhältnis der Dichten der beiden Komponenten die freie Enthalpie der Flüssigkeit allein schon zum Minimum machen muß. Verf. diskutiert in sehr allgemeiner Form die funktionale Abhängigkeit der freien Enthalpie und damit auch der Entropie vom Konzentrationsverhältnis, von der Temperatur und vom Druck. Letzterer spielt hier nur eine untergeordnete Rolle. Verf. kann sich von gewissen Willkürlichkeiten bezüglich der Entropie, die in der Tiszaschen Theorie noch enthalten sind, frei machen. Doch stimmen seine schon früher angegebenen und hier wieder verwendeten Bewegungsgleichungen für die beiden Komponenten im wesentlichen mit denjenigen Tiszas überein. Analog der bekannten Kelvinschen Behandlung der thermoelektrischen Erscheinungen leitet Verf. Gleichungen für die thermomechanischen Erscheinungen des He II ab; wegen der konsequenten Verwendung der freien Enthalpie hat dieser Beweis des Verf. gegenüber dem seinerzeit von London angegebenen gewisse Vorzüge. Verf. kündigt eine weitere Arbeit an, in der er Einzelheiten des He II betreffend mitteilen will.

G. U. Schubert (München).

Groot, S. R. de and C. A. ten Seldam: On the Bose-Einstein condensation of a perfect gas. Physica, The Hague 15, 671—672 (1949).

In einer kurzen Mitteilung berichten die Verff. über theoretische Untersuchungen der Bose-Einstein-Kondensation von polydimensionalen Raumesamtheiten von Systemen, die ihrerseits polydimensionalen Charakter haben, deren Energieeigenwerte also aus polydimensionalen Schrödingergleichungen zu bestimmen sind. Eine solche Gesamtheit ist z.B. eine große Anzahl N von Teilchen in einem n -dimensionalen Kastenpotential. Unter gewissen Bedingungen existieren endliche Kondensationstemperaturen. Dann gehorcht auch die mittlere Besetzungszahl N_0 des tiefsten Energieniveaus einem Gesetz, das ganz analog dem von London seinerzeit für das gewöhnliche ideale Bose-Gas aufgefundenen lautet: $N_0/N = 1 - (T/T_k)^q$. Dabei ist q der für die Existenz der Übergangstemperatur T_k charakteristische Exponent, der aus einer hier nicht wiederzugebenden Formel ermittelt wird. Im Londonschen

Fall ist $q = 3/2$. Die ausführliche Veröffentlichung erfolgt in den Proc. Cambridge philos. Soc. *G. U. Schubert* (München).

Heisenberg, Werner: Das elektrodynamische Verhalten der Supraleiter. Z. Naturforsch. **3a**, 65—75 (1949).

Die Ergebnisse einer ersten Arbeit [W. Heisenberg, Z. Naturforsch. **2a**, 185 (1947)] werden in ihren wesentlichen Gedanken zusammengefaßt und weiterverarbeitet. — Das elektrische Feld bewirkt eine Beschleunigung sämtlicher (nicht nur der Supraleitungs-)Elektronen. Der Impuls der normalleitenden Elektronen wird z. T. auf das Ionengitter, z. T. auf das Gitter der Supraelektronen übertragen. Schließlich tragen die letzteren allein den Suprastrom. Aus der Überlegung ergibt sich ein Ausdruck für die Supraleitungskonstante λ , der qualitativ die richtige Temperaturabhängigkeit zeigt. Außerdem kann eine Aussage über die normale Leitfähigkeit unter dem Sprungpunkt gemacht werden. Die genannten Vorstellungen geben weiterhin einen Anhaltspunkt für das Zustandekommen der Londonschen Spannungen als elastische Spannungen im S-Elektronengitter. Es wird weiter versucht, den Meißner-Ochsenfeld-Effekt als Auswirkung der Lorentzkraft zu deuten. Diese Überlegungen werden in Zusammenhang gebracht mit den theoretischen Ansätzen von London und Welker. Das Verschwinden des thermoelektrischen Konstanten wird modellmäßig erläutert und darauf hingewiesen, daß trotzdem im Falle von Temperaturdifferenzen die Existenz elektrischer Felder im Supraleiter als Außenfelder an offenen Supraleitungskreisen nachweisbar sein müßte. *Volz.*

Koppe, Heinz: Zur Theorie der unvollständigen Supraleitung. Ann. Physik, VI. F. **6**, 375—380 (1949).

Ein Normalleiter, der kleine eingesprengte supraleitende Bereiche enthält, wird als unvollständiger Supraleiter bezeichnet. Die supraleitenden Inseln bewirken eine wesentliche Erhöhung der mittleren Leitfähigkeit des Körpers. Wegen der magnetischen Schwellenwertkurve hängt die mittlere Leitfähigkeit unter Umständen stark von äußeren Magnetfeldern, von der Stromstärke und von der Temperatur ab. Dieses Verhalten eines unvollständigen Supraleiters untersucht Verf. am Beispiel des stromdurchflossenen zylindrischen Drahtes und des Drahtes im longitudinalen Magnetfeld. Bis zur Erreichung des magnetischen Schwellenwertes an der Drahtoberfläche ist der ganze Draht unvollständig supraleitend. Nach Überschreitung des magnetischen Schwellenwertes werden die supraleitenden Inseln in der Nähe der Drahtoberfläche zerstört. Jetzt umgibt ein normalleitender Mantel einen unvollständig supraleitenden Kern, so daß die mittlere Leitfähigkeit kleiner als vorher ist. Eine genauere Berücksichtigung der Struktur der supraleitenden Inseln kann vorerst noch nicht erfolgen.

G. U. Schubert (München).

Welker, Heinrich: Ein wellenmechanisches Modell des Supraleiters. Z. Naturforsch. **3a**, 461—469 (1948).

Es wird ein Gas von Elektronen und Defektelektronen betrachtet, in welchem je beide Spinrichtungen vertreten sind, und die Gesamteigenfunktion in Form eines Produkts von 4 Determinanten angesetzt. Durch Ränderung wird in einen oder auch 2 der 4 Faktoren eine Variable aus einem der anderen Determinantenfaktoren hereingebracht und damit eine Wellenfunktion hergestellt, die eine statistische Beziehung zwischen verschiedenen der vorhandenen Teilchenarten vermittelt. Um ein herausgegriffenes „Auf-“teilchen herum bildet sich eine Verarmung der damit statistisch verbundenen Teilchensorte heraus. Durch die verschiedene magnetische Wechselwirkung wird die Entartung, die zunächst zwischen Elektronen- und Defektelektronenkorrelationen besteht, aufgehoben, es kann zwischen S- und N-Stellen unterschieden werden, wobei die ersten solche Elektronen sind, um die herum sich ein Vorzugsstrom in der Bewegungsrichtung des Elektrons ausbildet. Es wird die gesamte auf diese Weise erhältliche Energierniedrigung abgeschätzt und versucht, das Modell zur Erklärung der unendlichen Leitfähigkeit im Supraleiter heranzuziehen.

Weiterhin wird versucht, auf Grund der vorhergehenden Überlegungen ein Kriterium aufzustellen für das Auftreten der Supraleitung im periodischen System. Diese ist in besonderen nur möglich, wenn die Elektronendichte in einem eng begrenzten Bereich liegt, in Übereinstimmung mit der Erfahrung. Volz (Erlangen).

Schubert, Gerhard U.: Der Energie-Impulstensor in der von Laue-Londonschen Elektrodynamik des Supraleiters. Ann. Physik, VI. F. 6, 163—168 (1949).

Es wird gezeigt, daß auch zur Kraftdichte im Supraleiter ein Energie-Impulstensor existiert. Dazu werden mit Hilfe des Begriffs der Viererleitung die v. Laue-Londonschen Gleichungen lorentzinvariant geschrieben. In dem Impulssatz der Supraleitung tritt der räumliche Anteil eines Vierervektors auf, der die Erweiterung der Lorentzkraft für den Supraleiter darstellt. Er läßt sich als (räumliche) Divergenz eines Tensors darstellen, der sich aus einem Maxwell'schen und einem v. Laue-Londonschen Anteil zusammensetzt. Er ist unsymmetrisch und kann so zu Drehmomenten führen, wie es auch das Experiment zeigt. Volz (Erlangen).

Condon, E. U.: Superconductivity and the Bohr magneton. Proc. nat. Acad. Sci. USA 35, 488—490 (1949).

Wenn ein supraleitender Zylinder in ein dazu paralleles Magnetfeld gebracht wird, entsteht ein Oberflächenstrom, der das äußere Magnetfeld im Inneren abschirmt. Der Zylinder nimmt durch den Oberflächenstrom ein magnetisches Moment an, das sein Maximum für die kritische Magnetfeldstärke annimmt. Dieses Moment wird verglichen mit demjenigen, das sich als Produkt aus Atomzahl/cm³ mal Bohrschem Magneton ergibt. Das letztere erweist sich als von gleicher Größenordnung für fast alle bekannten Supraleiter bzw. um Faktoren größer, die in der Nähe der Werte 5, 10, 15, 20 ... liegen. Die Auswirkung eines solchen Zusammenhangs auf die Konstanten der Londonschen Gleichungen wird diskutiert. Volz (Erlangen).

Burns, G. Preston: Equation of the magnetic threshold curve of a superconductor. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 999—1000 (1949).

Für die spez. Wärmen c_N der normalleitenden und c_S der supraleitenden Phase wird ein dreikonstanter Ansatz gemacht:

$$c_N = D \cdot T^3 + \gamma T, \quad c_S = (D + K) \cdot T^3.$$

Verf. schließt daraus auf einen parabelförmigen Verlauf der magnetischen Schwellwertkurve. Ein solcher ist bisher auch angenommen worden. G. U. Schubert.

Slater, J. C.: Electrons in perturbed periodic lattices. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 1592—1601 (1949).

Für ein genau periodisches Gitterpotential läßt sich nach Wannier [Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 52, 191 (1937)] die Lösung der Schrödingergleichung $H_0 \psi_0 = E_0 \psi_0$ in der Form $\psi_0(p, q) = \sum_k (1/\sqrt{N}) \{ \exp [(i/\hbar) p Q_k] \} a(q - Q_k)$ schreiben [Q_k Gittertranslation, a eine Wellenfunktion mit dem Argument $(q - Q_k)$ für ein isoliertes Atom, die in größerer Entfernung r wie $(\sin r)/r$ verläuft]. Es wird nun eine Störfunktion $H_1(q)$ angenommen und die Lösung der Schrödingergleichung $H \psi_n = E_n \psi_n$ in der Form $\psi_n(q) = \sum_k \bar{\psi}(Q_k) a(q - Q_k)$ angesetzt ($H = H_0 + H_1$).

Es wird das Theorem bewiesen, daß, wenn sich H_1 nur hinreichend langsam mit dem Ort ändert (ohne notwendig klein zu sein), $\bar{\psi}_n$ der Differentialgleichung

$$[E_0 - i \hbar \partial/\partial q + H_1(q)] \bar{\psi}_n = E_n \bar{\psi}_n(q)$$

genügt. Diese Gleichung kann bei bekannter Lösung des periodischen Problems aufgestellt werden, es ist in E_0 der Impuls durch den entsprechenden Differentialoperator zu ersetzen. Dieses Verfahren wird zur Lösung von Leitfähigkeitsproblemen, zur Diskussion der Störniveaus in Halbleitern, der Oberflächenzustände und der angeregten Zustände von Elektronen benutzt. Es gestattet, diese Probleme, die an sich nach verschiedenen Verfahren behandelt wurden, unter einheitlichen Gesichtspunkten zu lösen. Durch die statistische Anwendung des Verfahrens wird die Ver-

bindung der Poissonschen Gleichung mit der Fermi-Dirac-Statistik für Verunreinigungen in Metallen und Halbleitern und die Sperrwirkung von Gleichrichtern durchgeführt. Verf. bemerkt, daß das von James benutzte Verfahren (vgl. die folgenden Ref.) weniger leistungsfähig und nur auf eindimensionale Gitter anwendbar ist, bei diesem aber strengere Lösungen ergibt.

A. Kochendörfer (Stuttgart).

James, Hubert M.: Energy bands and wave functions in periodic potentials. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 1602—1610 (1949).*

Als Voruntersuchung zur Behandlung von eindimensionalen Gittern mit gestörten periodischen Potentialen (vgl. das folgende Ref.) wird die eindimensionale Schrödingergleichung für ein streng periodisches Potential untersucht. Die Lösungen werden für das ganze Gitter aus Zellenlösungen zusammengesetzt. Die verschiedenen Typen dieser Lösungen werden diskutiert und die sich „selbst angleichenden“ Lösungen (self-matching solutions) angegeben. Diese Lösungen sind dadurch charakterisiert, daß sie an beiden Zellenenden dasselbe Verhältnis Neigung/Funktionswert besitzen. Die Lösungen in den einzelnen Zellen können dann durch Multiplikation mit geeigneten Konstanten so aneinander angeglichen werden, daß sie sich zu einer Lösung für das ganze Gitter zusammenfügen. Diese Lösungen ermöglichen eine einfache Beschreibung der Bandstruktur. Der effektive Impuls der Teilchen in den verbotenen Zonen wird definiert und ein Parameter $\sigma(E)$ eingeführt, der für das gestörte Gitter von Bedeutung ist. Für die Lösungen in Nähe der Grenzen der erlaubten und verbotenen Energiebänder werden Reihenentwicklungen angegeben.

A. Kochendörfer (Stuttgart).

James, Hubert M.: Electronic states in perturbed periodic systemes. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 1611—1624 (1949).*

Halbklassische Untersuchungen mit Hilfe von Wellenpaketen zeigen, daß Verunreinigungen, durch welche das streng periodische Gitterpotential gestört wird, zu besonderen Energiezuständen Anlaß geben, die oberhalb oder unterhalb der erlaubten Energiebänder liegen, je nachdem die Ionenladung der Verunreinigung kleiner oder größer ist als die des durch sie ersetzten Ions. Ebenso bewirken innere oder freie Kristalloberflächen lokalisierte Zustände. Diese Betrachtungsweise führt auch auf die Wellengleichung mit der effektiven Masse von Peckar [*Journ. Phys. USSR 10 431 (1946)*]. Strenge Lösungen für das gestörte periodische Potential werden dann aus Zellenlösungen für das ungestörte periodische Potential (vgl. vorstehendes Ref.) zusammengesetzt. Wenn die Störung hinreichend langsam mit dem Ort veränderlich ist (ohne notwendig klein zu sein), ergibt sich so eine analytische Lösung mit Fehlern von der Größe der Änderung des Störpotentials in einer Zelle im Verhältnis zur gesamten Energie des Teilchens. Die Wellengleichung mit der effektiven Masse ergibt sich in Verbindung mit dieser Lösung, aber der Zusammenhang ihrer Lösung mit der strengen Lösung ist komplexer, als bisher angenommen wurde. Es wird angegeben, wie man letztere durch Zerlegung der ersteren in zwei Exponentialbestandteile und Multiplikation derselben mit geeigneten periodischen Funktion gewinnen kann. Ferner wird gezeigt, daß jeder quadratisch integrierbaren strengen Lösung eine ebensolche der effektiven Masse-Gleichung mit gleicher Energie entspricht, so daß die mit dieser Gleichung erhaltenen stationären Energiewerte eine überraschende wirkliche Bedeutung besitzen.

A. Kochendörfer (Stuttgart).

Schottky, Walter: Das Herkunfts- und Stoßzeitproblem in der Elektronentheorie der Festleiter. *Ann. Physik, VI. F. 6, 193—214 (1949).*

Die Bestimmung der Verteilungsfunktion der Elektronen in Festleitern nach den beiden klassischen Methoden von Riecke-Drude und Lorentz-Boltzmann wird auf ihre gemeinsamen Wurzeln zurückgeführt. Insbesondere wird die Voraussetzung der „thermischen Entstehungsrate“ oder der „erinnerungslöschenden Stöße“ untersucht, und es werden die Zusatzglieder ermittelt, die auftreten, wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt ist. Das Ergebnis läßt sich anschaulich so aussprechen,

daß sich — auch in anisotropen Kristallen — 6 „partielle Abklingzeiten“ (für jede Koordinatenrichtung 2) angeben lassen, die eine „quasithermische Entstehungsrate“ bestimmen und die auch für die Verlustprozesse maßgebend sind. Die wirkliche Bestimmung der Störungsfunktion führt auf Funktionalgleichungen für die Abklingzeiten. Für den Lorentzschen Fall des elastischen Kugelstoßes lassen sich diese durch einfache Integrationen erledigen, ebenso der allgemeine Fall des isotropen Mediums. Je nach den Symmetriebedingungen des Körpers vermindert sich die Zahl der zu bestimmenden Abklingzeiten. *Volz* (Erlangen).

Shoemaker, David P.: A method for calculating the energy of a Bloch wave in a metal. *Physica, The Hague* **15**, 34—39 (1949).

In der Wigner-Seitz-Slaterschen Annäherung für die Wellenfunktionen eines Elektrons im Kristallgitter [*Physic. Rev., Lancaster Pa.*, **II. S. 45**, 794 (1934); werden die durch den gegebenen Wellenzahlvektor \mathbf{k} geforderten Übergangsbedingungen nur in einzelnen Punkten zwischen den Atommitten erfüllt. Hier wird nun die Abhängigkeit von der \mathbf{k} -Richtung vernachlässigt (bei hoher Koordinationszahl tragbar) durch eine Art Mittelung über die Richtung. Das Schema zur Berechnung der Energie als Funktion, jetzt nur vom Betrage von \mathbf{k} , wird dadurch vereinfacht.

F. Hund (Jena).

Ehrenberg, W.: The electric conductivity of simple semiconductors. *Proc. physic. Soc. London, Sect. A* **63**, 75—76 (1950).

Von K. Schiffrin wurde [*Acad. Sci. USSR, J. Physics* **8**, 242 (1944); *J. Techn. Phys. USSR* **14**, 40 (1944)] für die Leitfähigkeit einfacher Verunreinigungs-Halbleiter die Formel $\sigma = \sigma_0 \ln(1 + \exp(\zeta/kT))$ abgeleitet, welche im ganzen Temperaturbereich gültig sein sollte, sofern die freie Weglänge der Elektronen unabhängig von ihrer Energie und umgekehrt proportional zur Temperatur ist und die Leitungselektronen nur von einer Sorte von Verunreinigungen geliefert werden. Das thermodynamische Potential ζ ist dabei nur implizit durch eine Integralgleichung gegeben. Das in dieser Gleichung auftretende Integral über die Fermische Verteilung wird vom Verf. — nach dem Vorbild von G. Busch und H. Labhart [*Helvetica physica Acta* **19**, 463 (1946)] — durch eine analytische Funktion approximiert. Die Integralgleichung verwandelt sich dadurch in eine quadratische Gleichung für $\exp(\zeta/kT)$, so daß für diese Größe und damit auch für die Leitfähigkeit ein expliziter Näherungsausdruck angegeben werden kann.

W. Franz (Münster).

Mann, Elizabeth H.: An elastic theory of dislocations. *Proc. R. Soc., London, A* **199**, 376—394 (1949).

Die Arbeit befaßt sich mit Versetzungen (dislocations) im unendlich langen Zylinder. Schneidet man in einen solchen Zylinder einen Spalt, deformiert diesen durch äußere Kräfte in der Schnittfläche, so kann man den Schnitt wieder zusammenlöten, falls die äußeren Kräfte im Schnitt sich kompensieren. Der Zylinder bleibt in einem Zustand innerer Spannungen zurück. Dieser Zustand heißt eine Versetzung. Frühere Arbeiten (Timpe, Volterra) setzen voraus, daß sämtliche Spannungskomponenten stetig durch den Schnitt gehen. Verf. läßt diese, nicht notwendige, Voraussetzung fallen und verlangt lediglich Gleichheit der Oberflächenkräfte im Schnitt. Die elastischen Lösungen werden für zwei Fälle diskutiert: 1. Ebener Verzerrungszustand senkrecht zur Achse. Reduktion der elastischen Gleichungen auf die Bipotentialgleichung. 2. Nur die Verschiebung in Richtung der Zylinderachse existiert und hängt nicht von der Koordinate in Achsenrichtung ab. Reduktion auf die Potentialgleichung. Benutzt wird in beiden Fällen die bekannte, allgemeine Lösung der entsprechenden Gleichungen für den Zylinder, wobei die die Oberflächenkräfte liefernden Spannungskomponenten eindeutig sein müssen, während für die übrigen mehrdeutigen Funktionen zugelassen sind. Im wesentlichen lassen sich die vom Verf. diskutierten Versetzungen durch eine Dichteverteilung von Voltterraschen Versetzungen darstellen. *Leibfried* (Göttingen).